# NP-πληρότητα

Προβλήματα όπως αυτά του Περιοδεύοντος Πωλητή, της Ικανοποιησιμότητας και του Κύκλου Hamilton, ανήκουν σε μια κατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται NP-πλήρη (NP-complete).

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν για ένα οποιοδήποτε NP-πλήρες πρόβλημα βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος, τότε $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Για να αποδεικνύουμε ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες, θα χρησιμοποιούμε την έννοια της αναγωγής πολυωνυμικού χρόνου.

# Αναγωγές

Διαισθητικά, μια αναγωγή $\tau$ είναι μια συνάρτηση που μετασχηματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο στιγμιότυπα ενός προβλήματος A σε στιγμιότυπα ενός προβλήματος B με τέτοιο τρόπο ώστε το $x$ είναι ένα ‘ναι’ στιγμιότυπο του A αν και μόνο αν το $\tau(x)$ είναι ένα ‘ναι’ στιγμιότυπο του B.

# Αναγωγές

Διαισθητικά, μια αναγωγή $\tau$ είναι μια συνάρτηση που μετασχηματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο στιγμιότυπα ενός προβλήματος A σε στιγμιότυπα ενός προβλήματος B με τέτοιο τρόπο ώστε το $x$ είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του A αν και μόνο αν το $\tau(x)$ είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του B.

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ονομάζεται υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο αν υπάρχει μία πολυωνυμικά φραγμένη μηχανή Turing που την υπολογίζει.

**Ορισμός:** Έστω δύο γλώσσες $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Μία συνάρτηση $\tau$ υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο θα ονομάζεται πολυωνυμική αναγωγή από την $L_1$ στην $L_2$ αν για κάθε $x \in \Sigma^*$ ισχύει το εξής: $x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$.

# Αναγωγές, συνέχεια

Έστω ότι μας δίνεται μία πολυωνυμική αναγωγή $\tau$ από το πρόβλημα A στο πρόβλημα B. Έστω επίσης ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα B.

Για να αποφασίσουμε αν ένα στιγμιότυπο $x$ του A είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του A, αρκεί να υπολογίσουμε το $\tau(x)$ και μετά να ελέγξουμε αν αυτό είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του B.

Επομένως, αν το πρόβλημα B μπορεί να επιλυθεί αποτελεσματικά, τότε το ίδιο ισχύει και για το A. Επίσης, αν το A απαιτεί εκθετικό χρόνο, τότε το ίδιο ισχύει και για το B (γιατί;)

# Αναγωγές, συνέχεια

Έστω ότι μας δίνεται μία πολυωνυμική αναγωγή $\tau$ από το πρόβλημα A στο πρόβλημα B. Έστω επίσης ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα B.

Για να αποφασίσουμε αν ένα στιγμιότυπο $x$ του A είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του A, αρκεί να υπολογίσουμε το $\tau(x)$ και μετά να ελέγξουμε αν αυτό είναι ένα 'ναι' στιγμιότυπο του B.

Επομένως, αν το πρόβλημα B μπορεί να επιλυθεί αποτελεσματικά, τότε το ίδιο ισχύει και για το A. Επίσης, αν το A απαιτεί εκθετικό χρόνο, τότε το ίδιο ισχύει και για το B (γιατί;)

Συμπέρασμα: Αν έχουμε πολυωνυμική αναγωγή από το A στο B, τότε το B είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο και το A.

# NP πλήρεις γλώσσες

**Ορισμός**: Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ονομάζεται NP-πλήρης αν:

1. $L \in \mathsf{NP}$, και
2. για κάθε γλώσσα $L' \in \mathsf{NP}$, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$.

# NP πλήρεις γλώσσες

**Ορισμός**: Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ονομάζεται NP-πλήρης αν:

1. $L \in$ NP, και
2. για κάθε γλώσσα $L' \in$ NP, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$.

**Θεώρημα**: Έστω $L$ μία NP-πλήρης γλώσσα. Τότε, P=NP αν και μόνο αν $L \in$ P.

($\Rightarrow$) Αφού $L \in$ NP και υποθέσαμε ότι P $=$ NP, έχουμε $L \in$ P.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $L \in$ P. Αρκεί να δείξουμε ότι και οποιαδήποτε άλλη γλώσσα $L'$ που ανήκει στο NP ανήκει επίσης στο P. Με βάση τον ορισμό της NP-πληρότητας, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή $\tau$ από την $L'$ στην $L$. Αφού όμως $L \in$ P, είναι εύκολο να δει κανείς ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ντετερμινιστική μηχανή Turing που αποφασίζει την $L'$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

# Το Θεώρημα του Cook

Αν καταφέρουμε να βρούμε ένα πρώτο πρόβλημα που να είναι NP-πλήρες, μετά μπορούμε (με τη χρήση αναγωγών) να αποδεικνύουμε ότι και άλλα προβλήματα είναι NP-πλήρη.

Για το πρώτο όμως αυτό πρόβλημα, η απόδειξη πρέπει να γίνει με βάση τον ορισμό. Το πρώτο πρόβλημα που αποδείχτηκε ότι είναι NP-πλήρες, ήταν η Ικανοποιησιμότητα:

**Θεώρημα**: [S. Cook, 1971] Το πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητας είναι NP-πλήρες.

Με βάση όσα έχουμε ήδη πει, προκύπτει ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για την Ικανοποιησιμότητα (εκτός και αν P=NP).

# Πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητας (υπενθύμιση)

Πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητας (SATISFIABILITY): Δεδομένου ενός τύπου $F$ σε συζευκτική κανονική μορφή, είναι ο $F$ ικανοποιήσιμος;

**Παράδειγμα:** Έστω ο τύπος Boole σε συζευκτική κανονική μορφή

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$$

# Σύνθεση αναγωγών

**Ορισμός**: Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ονομάζεται NP-πλήρης αν:

1. $L \in \mathsf{NP}$, και
2. για κάθε γλώσσα $L' \in \mathsf{NP}$, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$.

## Σύνθεση αναγωγών

**Ορισμός**: Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ονομάζεται NP-πλήρης αν:

1. $L \in$ NP, και
2. για κάθε γλώσσα $L' \in$ NP, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει τη βασική μέθοδο για να αποδείξουμε πως μια γλώσσα είναι NP-πλήρης.

**Θεώρημα**: Έστω γλώσσα $L \in$ NP. Αν μια $L'$ είναι NP-πλήρης και υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$ τότε και η $L$ είναι NP-πλήρης.

## Σύνθεση αναγωγών

**Ορισμός**: Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ονομάζεται NP-πλήρης αν:

1. $L \in$ NP, και
2. για κάθε γλώσσα $L' \in$ NP, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει τη βασική μέθοδο για να αποδείξουμε πως μια γλώσσα είναι NP-πλήρης.

**Θεώρημα**: Έστω γλώσσα $L \in$ NP. Αν μια $L'$ είναι NP-πλήρης και υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την $L'$ στην $L$ τότε και η $L$ είναι NP-πλήρης.

Γνωρίζουμε ήδη μια τέτοια γλώσσα $L'$ : τη γλώσσα SATISFIABILITY.

## Εφαρμογή της μεθόδου

**Θεώρημα:** Το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη:** Με αναγωγή από την Ικανοποιησιμότητα. Έστω $F$ ένας τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή, και έστω $C$ μια «μεγάλη» φράση του $F$, δηλαδή $C = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$, $k > 3$.

## Εφαρμογή της μεθόδου

**Θεώρημα:** Το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη:** Με αναγωγή από την Ικανοποιησιμότητα. Έστω $F$ ένας τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή, και έστω $C$ μια «μεγάλη» φράση του $F$, δηλαδή $C = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$, $k > 3$.

Αντικαθιστούμε τη $C$ με τη σύζευξη πιο απλών φράσεων:

$$(l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee l_3 \vee y_2) \wedge \cdots \wedge (\overline{y_{k-4}} \vee l_{k-2} \vee y_{k-3}) \wedge (\overline{y_{k-3}} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

όπου τα $y_i$ είναι νέες μεταβλητές.

Μπορεί κανείς να δει ότι ο νέος τύπος είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $F$ είναι ικανοποιήσιμος. Είναι επίσης απλό να δει κανείς ότι η παραπάνω μετατροπή είναι πολυωνυμική αναγωγή. Επομένως το 3-SAT είναι NP-πλήρες.

## Εφαρμογή της μεθόδου

**Θεώρημα:** Το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη:** Με αναγωγή από την Ικανοποιησιμότητα. Έστω $F$ ένας τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή, και έστω $C$ μια «μεγάλη» φράση του $F$, δηλαδή $C = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$, $k > 3$.

Αντικαθιστούμε τη $C$ με τη σύζευξη πιο απλών φράσεων:

$$(l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee l_3 \vee y_2) \wedge \cdots \wedge (\overline{y_{k-4}} \vee l_{k-2} \vee y_{k-3}) \wedge (\overline{y_{k-3}} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

όπου τα $y_i$ είναι νέες μεταβλητές.

Μπορεί κανείς να δει ότι ο νέος τύπος είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $F$ είναι ικανοποιήσιμος. Είναι επίσης απλό να δει κανείς ότι η παραπάνω μετατροπή είναι πολυωνυμική αναγωγή. Επομένως το 3-SAT είναι NP-πλήρες.

Είναι η απόδειξη μας πλήρης;

# Εφαρμογή της (πλήρους) μεθόδου

**Θεώρημα:** Το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη:** 1. Η γλώσσα 3-SAT ανήκει στο NP. (γιατί;)

# Εφαρμογή της (πλήρους) μεθόδου

**Θεώρημα:** Το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη:** 1. Η γλώσσα 3-SAT ανήκει στο NP. (γιατί;)

2. Αναγωγή από την Ικανοποιησιμότητα. Έστω $F$ ένας τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή, και έστω μια «μεγάλη» φράση του $F$, δηλαδή $C = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$, $k > 3$.

Αντικαθιστούμε τη $C$ με τη σύζευξη πιο απλών φράσεων:

$$(l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee l_3 \vee y_2) \wedge \cdots \wedge (\overline{y_{k-4}} \vee l_{k-2} \vee y_{k-3}) \wedge (\overline{y_{k-3}} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

όπου τα $y_i$ είναι νέες μεταβλητές.

Μπορεί κανείς να δει ότι ο νέος τύπος είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $F$ είναι ικανοποιήσιμος. Είναι επίσης απλό να δει κανείς ότι η παραπάνω μετατροπή είναι πολυωνυμική αναγωγή. Επομένως το 3-SAT είναι NP-πλήρες.

# Άλλα NP-πλήρη προβλήματα

Ανεξάρτητο Σύνολο: Δεδομένων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός ακεραίου $K \geq 2$, υπάρχει υποσύνολο $C$ του $V$ με $|C| \geq K$, τέτοιο ώστε, για κάθε $v_i, v_j \in C$, να μην υπάρχει ακμή μεταξύ των $v_i$ και $v_j$;

**Θεώρημα**: Το πρόβλημα Ανεξάρτητο Σύνολο είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη (Σκιαγράφηση)**:
1. Το πρόβλημα Ανεξάρτητο Σύνολο ανήκει στο NP.

## Άλλα NP-πλήρη προβλήματα

Ανεξάρτητο Σύνολο: Δεδομένων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός ακεραίου $K \geq 2$, υπάρχει υποσύνολο $C$ του $V$ με $|C| \geq K$, τέτοιο ώστε, για κάθε $v_i, v_j \in C$, να μην υπάρχει ακμή μεταξύ των $v_i$ και $v_j$;

**Θεώρημα**: Το πρόβλημα Ανεξάρτητο Σύνολο είναι NP-πλήρες.

**Απόδειξη (Σκιαγράφηση)**:

1. Το πρόβλημα Ανεξάρτητο Σύνολο ανήκει στο NP.
2. Με αναγωγή από το 3-SAT. Έστω $F$ ένας τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή.

Με βάση τον $F$ κατασκευάζουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ και έναν ακέραιο $K$ με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο $K$ κόμβων στο $G$ αν και μόνο αν ο $F$ είναι ικανοποιήσιμος.

Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την κατασκευή αυτή.