

Υπολογισμοί με M.T.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια M.T. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.

Υπολογισμοί με M.T.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια M.T. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.

Λέμε ότι η M **δέχεται** μια είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μία συνολική κατάσταση αποδοχής. Λέμε ότι η M **απορρίπτει** την w αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Υπολογισμοί με M.T.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια M.T. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.

Λέμε ότι η M **δέχεται** μια είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μία συνολική κατάσταση αποδοχής. Λέμε ότι η M **απορρίπτει** την w αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$. Λέμε ότι η M **αποφασίζει** μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$:

- αν $w \in L$, η M δέχεται την w
- αν $w \notin L$, η M απορρίπτει την w .

Υπολογισμοί με M.T.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια M.T. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n , θα ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.

Λέμε ότι η M **δέχεται** μια είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μία συνολική κατάσταση αποδοχής. Λέμε ότι η M **απορρίπτει** την w αν η $(s, \triangleright \sqcup w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$. Λέμε ότι η M **αποφασίζει** μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$:

- αν $w \in L$, η M δέχεται την w
- αν $w \notin L$, η M απορρίπτει την w .

Μια γλώσσα λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει μια M.T. που την αποφασίζει.

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $w \in \Sigma_0^*$. Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει με είσοδο w , και ότι $(s, \triangleright \sqcup w) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup y)$, για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Το y ονομάζεται **η έξοδος της M με είσοδο w** και συμβολίζεται με $M(w)$.

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $w \in \Sigma_0^*$. Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει με είσοδο w , και ότι $(s, \triangleright \sqcup w) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup y)$, για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Το y ονομάζεται **η έξοδος της M με είσοδο w** και συμβολίζεται με $M(w)$.

Έστω $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$. Λέμε ότι η M **υπολογίζει** τη συνάρτηση f αν, για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$.

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $w \in \Sigma_0^*$. Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει με είσοδο w , και ότι $(s, \triangleright \sqcup w) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup y)$, για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Το y ονομάζεται **η έξοδος της M με είσοδο w** και συμβολίζεται με $M(w)$.

Έστω $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$. Λέμε ότι η M **υπολογίζει** τη συνάρτηση f αν, για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **αναδρομική**, αν υπάρχει μία Μ.Τ. που την υπολογίζει.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ που ορίζεται ως $f(w) = ww$, μπορεί να υπολογιστεί από μια Μ.Τ. που πρώτα αντιγράφει το w (μηχανή C) και μετά κάνει μετατόπιση προς τα αριστερά (μηχανή $S_{\leftarrow}$).

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικές συναρτήσεις;

Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0, 1\}^*$ στο $\{0, 1\}^*$ μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικές συναρτήσεις;

Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0, 1\}^*$ στο $\{0, 1\}^*$ μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ. τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$, και έστω $f : N^k \rightarrow N$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν για όλα τα $w_1, \dots, w_k \in 0 \cup 1\{0, 1\}^*$, $num(M(w_1; \dots; w_k)) = f(num(w_1), \dots, num(w_k))$

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικές συναρτήσεις;

Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0, 1\}^*$ στο $\{0, 1\}^*$ μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ. τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$, και έστω $f : N^k \rightarrow N$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν για όλα τα $w_1, \dots, w_k \in 0 \cup 1\{0, 1\}^*$, $num(M(w_1; \dots; w_k)) = f(num(w_1), \dots, num(w_k))$

Παράδειγμα: Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια Μ.Τ. που να υπολογίζει τη συνάρτηση διαδοχής στους φυσικούς αριθμούς (δηλαδή τη συνάρτηση $f(n) = n + 1$).

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqsubset, \sqsupset\}$ και έστω $L \subseteq \Sigma_0^*$ μια γλώσσα. Λέμε ότι η M **ημιαποφασίζει** την L αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ αληθεύει το εξής: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w . Μία γλώσσα είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν υπάρχει μία Μ.Τ. που ημιαποφασίζει την L .

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $L \subseteq \Sigma_0^*$ μια γλώσσα. Λέμε ότι η M **ημιαποφασίζει** την L αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ αληθεύει το εξής: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w . Μία γλώσσα είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν υπάρχει μία Μ.Τ. που ημιαποφασίζει την L .

Οι Μ.Τ. που ημιαποφασίζουν γλώσσες δεν είναι αλγόριθμοι. Αν μια Μ.Τ. ημιαποφασίζει μια γλώσσα L και της δοθεί ως είσοδος μια συμβολοσειρά $w \notin L$, τότε δεν θα ξέρουμε ποτέ αν έχουμε περιμένει αρκετά για μια απάντηση.

Ποιά η σχέση ανάμεσα στις αναδρομικές και τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες;

Αναδρομικές - Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες: Ιδιότητες

Θεώρημα: Αν μια γλώσσα είναι αναδρομική, τότε είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Απόδειξη: Δεδομένης μιας Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει μια γλώσσα L , ορίζουμε $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$, όπου δ' είναι η δ επανυξημένη με τις μεταβάσεις $\delta'(n, a) = (n, a)$, για όλα τα $a \in \Sigma$.

Αναδρομικές - Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες: Ιδιότητες

Θεώρημα: Αν μια γλώσσα είναι αναδρομική, τότε είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Απόδειξη: Δεδομένης μιας Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει μια γλώσσα L , ορίζουμε $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$, όπου δ' είναι η δ επαυξημένη με τις μεταβάσεις $\delta'(n, a) = (n, a)$, για όλα τα $a \in \Sigma$.

Θεώρημα: Αν η L είναι μία αναδρομική γλώσσα, τότε το συμπλήρωμα $\bar{L}$ της L είναι επίσης αναδρομική γλώσσα.

Απόδειξη: Έστω ότι η L αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$. Τότε η $\bar{L}$ αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y, n\})$ όπου:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} n, & \text{αν } \delta(q, a) = y \\ y, & \text{αν } \delta(q, a) = n \\ \delta(q, a), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$