Επεκτάσεις της Μηχανής Turing

1. ταινία άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις.
2. πολλές ταινίες αντί μόνο μία.
3. πολλές κεφαλές αντί μία.
4. δισδιάστατη ταινία.

Αυτές οι επιπλέον δυνατότητες διευκολύνουν το σχεδιασμό μιας μηχανής για μερικά προβλήματα και σε πολλές περιπτώσεις μειώνουν τον απαιτούμενο αριθμό υπολογιστικών βημάτων για την εκτέλεση κάποιων εργασιών.

Οι επεκτάσεις δεν προσθέτουν τίποτα στις κλάσεις των συναρτήσεων που υπολογίζονται ή των γλωσσών που γίνονται αποδεκτές από τις κοινές Μ.Τ.

Οποιαδήποτε από τις «επαυξημένες» μηχανές μπορούμε να την προσομοιώσουμε με μία κοινή Μ.Τ.

Μηχανές Turing με πολλαπλές ταινίες

Μια Μ.Τ. $k \geq 1$ ταινιών είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, H)$, όπου K, Σ, s, H όπως συνήθως, και δ συνάρτηση από το $(K - H) \times \Sigma^k$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})^k$. Δηλαδή, για κάθε κατάσταση q και κάθε k-άδα από σύμβολα της ταινίας $(a_1, \ldots, a_k)$, έχουμε $\delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (p, (b_1, \ldots, b_k))$.

Μια συνολική κατάσταση σε μια Μ.Τ. k ταινιών προσδιορίζει την κατάσταση, τα περιεχόμενα της ταινίας και τη θέση της κεφαλής σε καθεμία από τις k ταινίες. Επομένως, μια συνολική κατάσταση θα συμβολίζεται στη μορφή $(q, (w_1\underline{a_1}u_1, \ldots, w_k\underline{a_k}u_k))$.

Ο ορισμός της έννοιας παράγει σε ένα βήμα είναι απλή επέκταση του αντίστοιχου ορισμού για τις απλές Μ.Τ. (μόνο που τώρα σε ένα βήμα επηρρεάζονται και οι k ταινίες).

Υπολογισμοί με Μ.Τ. k ταινιών

Υιοθετούμε τις ακόλουθες συμβάσεις:

- Η συμβολοσειρά εισόδου τοποθετείται στην πρώτη ταινία, με τον ίδιο τρόπο όπως και σε μια απλή Μ.Τ.
- Οι άλλες ταινίες είναι αρχικά κενές, με την κεφαλή στο αριστερότερο τετράγωνο της καθεμίας.
- Στο τέλος του υπολογισμού, η μηχανή θα αφήσει την έξοδο της στην πρώτη της ταινία.
- Τα περιεχόμενα των άλλων ταινών αγνοούνται.

Με τη βοήθεια των πολλαπλών ταινιών, είναι συχνά ευκολότερο να υπολογίσει κανείς μια δεδομένη συνάρτηση.

Ισοδυναμία με απλές Μ.Τ.

Θεώρημα: Οποιαδήποτε συνάρτηση υπολογίζεται, ή οποιαδήποτε γλώσσα αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μια μηχανή Turing k ταινιών, υπολογίζεται, αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μια απλή μηχανή Turing.

Απόδειξη: (Σκιαγράφηση) Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε μια Μ.Τ. k ταινιών χρησιμοποιώντας μια απλή Μ.Τ. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε τα περιεχόμενα των k ταινιών πάνω στη μοναδική ταινία την απλής Μ.Τ., το ένα μετά το άλλο, χωρίζοντας τα με κάποιο ειδικό σύμβολο (πχ. με το σύμβολο $\#$).

Για να γνωρίζουμε σε πιο σημείο βρίσκεται η κεφαλή σε κάθε ταινία, χρησιμοποιούμε μια τελεία πάνω από κάθε σύμβολο στο οποίο βρίσκεται η κεφαλή (στην ουσία έχουμε επεκτείνει το αλφάβητο).

Η προσομοίωση των κινήσεων της Μ.Τ. k ταινιών είναι (με τη χρήση των παραπάνω συμβάσεων) αρκετά εύκολη.

Μη ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Διαισθητικά: Μια μη ντετερμινιστική Μ.Τ. όταν βρίσκεται σε μια δεδομένη κατάσταση και διαβάζει ένα σύμβολο από την ταινία, μπορεί να έχει περισσότερες από μία δυνατές επιλογές συμπεριφοράς.

Τυπικά: Μια μη ντετερμινιστική Μ.Τ. είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \Delta, s, H)$, όπου K, Σ, s, H όπως συνήθως, και Δ είναι ένα υποσύνολο του $((K - H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}))$.

Η σχέση $\vdash_M$ δεν είναι μονοσήμαντη: από μία συνολική κατάσταση μπορούν να παραχθούν πολλές διαφορετικές συνολικές καταστάσεις σε ένα βήμα.

Ο υπολογισμός μιας μη-ντετερμινιστικής Μ.Τ. είναι στην ουσία ένα δέντρο, τα κλαδιά του οποίου αντιστοιχούν σε διαφορετικές εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να ακολουθήσει η μηχανή.

Υπολογισμοί με μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Έστω M μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing. Θα λέμε ότι:

Η M δέχεται μια συμβολοσειρά w αν όταν ξεκινήσει με την w στην ταινία της, υπάρχει ένα κλάδος του υπολογισμού της M που οδηγεί σε μια κατάσταση αποδοχής.

Η M ημιαποφασίζει μια γλώσσα L αν ισχύει: $w \in L$ αν και μόνο αν η M δέχεται την w.

Η M αποφασίζει μια γλώσσα L αν: α) όλοι οι υπολογισμοί της M τερματίζουν και β) $w \in L$ αν και μόνο αν η M δέχεται τη w.

Η M υπολογίζει μια συνάρτηση f αν για κάθε είσοδο w της M που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, όλοι οι δυνατοί υπολογισμοί οδηγούν στο αποτέλεσμα $f(w)$.

Ισοδυναμία με απλές Μηχανές Turing

Θεώρημα: Κάθε μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing είναι ισοδύναμη με μια ντετερμινιστική μηχανή Turing.

Απόδειξη: (Σκιαγράφηση) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing N μπορεί να προσομοιωθεί από μία ντετερμινιστική μηχανή Turing D. Η ιδέα είναι ότι η D θα πρέπει να δοκιμάσει όλα τα πιθανά κλαδιά που μπορούν να προκύψουν από τη μη-ντετερμινιστική λειτουργία της N.

Η D θα πρέπει να είναι πολύ προσεκτική στον τρόπο που διερευνά το δέντρο της N. Μια καλή ιδέα είναι να χρησιμοποιήσει breadth first search (το depth first search δεν θα δούλευε). Με αυτό τον τρόπο η D θα επισκέπτεται κάθε φορά όλους τους κόμβους που βρίσκονται στο ίδιο βάθος, μέχρι να καταφέρει να βρει μία συνολική κατάσταση αποδοχής (αν αυτή υπάρχει).