



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Τεχνικές πολλαπλών αναλύσεων  
στην απλοποίηση  
τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων

Διδακτορική Διατριβή

Νικόλαος Β. Πλατής

Αθήνα  
Ιανουάριος 2005



### **Επιβλέπων**

ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΘΕΟΧΑΡΗΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

### **Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή**

ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΘΕΟΧΑΡΗΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΙΣΤΡΑΗΣ, Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΦΙΛΙΠΠΟΣ ΤΖΑΦΕΡΗΣ, Λέκτορας ΕΚΠΑ

### **Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή**

ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΘΕΟΧΑΡΗΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΙΣΤΡΑΗΣ, Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΦΙΛΙΠΠΟΣ ΤΖΑΦΕΡΗΣ, Λέκτορας ΕΚΠΑ

ΗΛΙΑΣ ΚΟΥΤΣΟΥΠΑΣ, Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΚΟΛΛΙΑΣ, Καθηγητής ΕΜΠ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΕΜΠΡΗΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΣΑΓΚΡΙΩΤΗΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΚΠΑ



*Αφιερώνεται στην οικογένειά μου  
που με στήριξε με κάθε τρόπο  
κατά τη μελέτη μου για αυτή τη διατριβή.*



## Περίληψη

Σε αυτή τη διατριβή μελετούμε την απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων με χρήση τεχνικών που βασίζονται σε διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών, καθώς και την αξιοποίηση των παραγόμενων πολλαπλών επιπέδων λεπτομέρειας (προοδευτικών πλεγμάτων) για την αποτελεσματική επεξεργασία των μοντέλων.

Ως προς τα τριγωνικά πλέγματα, παρουσιάζουμε μία μέθοδο κατασκευής προοδευτικών περιβλήματων τους, με κατάλληλες συρρικνώσεις ακμών. Χρησιμοποιούμε τα παραγόμενα περιβλήματα για την επιτάχυνση του ελέγχου εύρεσης τομής μεταξύ του αρχικού πλέγματος και μίας ευθείας.

Ως προς τα τετραεδρικά πλέγματα, απλοποιούμε πλέγματα με ενσωματωμένα διανυσματικά πεδία. Κατασκευάζουμε προοδευτικά τετραεδρικά πλέγματα λαμβάνοντας υπ' όψιν, κατά τη συρρίκνωση ακμών, τόσο τη γεωμετρία του πλέγματος όσο και το ενσωματωμένο πεδίο.

Τέλος, παρουσιάζουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο υπολογισμού τομής ακτίνας-τετραέδρου, ο οποίος αξιοποιεί τις συντεταγμένες Plücker για την επιτάχυνση των υπολογισμών. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική επεξεργασία προοδευτικών τετραεδρικών πλεγμάτων.





## Abstract

In this thesis we study the simplification of triangular and tetrahedral meshes by the use of techniques based on successive edge collapses, as well as the exploitation of the generated multiple levels of detail (progressive meshes) for the effective processing of the models.

Regarding triangular meshes, we present a method for the construction of progressive hulls, by suitable edge collapses. We use the generated hulls for the acceleration of intersection tests between the initial mesh and a line.

Regarding tetrahedral meshes, we simplify meshes with associated vector fields. We construct progressive tetrahedral meshes by taking into account, while collapsing edges, both the geometry of the mesh and the associated field.

Finally, we present an efficient algorithm for computing ray-tetrahedron intersection, which exploits Plücker coordinates to accelerate computations. This algorithm may be used for the efficient processing of progressive tetrahedral meshes.



## Περιεχόμενα

Πίνακας συμβόλων	xv
Πρόλογος	xvii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Πεδίο έρευνας . . . . .	1
1.2 Επισκόπηση της διατριβής . . . . .	3
<b>2 Αναπαράσταση και απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων</b>	<b>5</b>
2.1 Βασικές έννοιες . . . . .	5
2.1.1 Αναπαράσταση επιφανειών . . . . .	5
2.1.2 Αναπαράσταση όγκων . . . . .	12
2.2 Απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων . . . . .	15
2.2.1 Σφάλμα απλοποίησης . . . . .	16
2.2.2 Απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων . . . . .	19
2.2.3 Απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων . . . . .	24
2.2.4 Απλοποίηση πλεγμάτων με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών	26
<b>3 Προοδευτικά περιβλήματα για την εύρεση τομής με τριγωνικά πλέγματα</b>	<b>41</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	41
3.2 Σχετικές εργασίες . . . . .	42
3.2.1 Ιεραρχικές δομές για εφαρμογές εύρεσης τομής . . . . .	42
3.2.2 Προοδευτικά περιβλήματα . . . . .	43
3.3 Δημιουργία προοδευτικού περιβλήματος . . . . .	46

3.3.1	Προτεραιότητα συρρίκνωσης ακμής . . . . .	46
3.3.2	Βελτιώσεις και επαυξήσεις του αλγορίθμου . . . . .	48
3.3.3	Αποτελέσματα . . . . .	51
3.4	Έλεγχος τομής με χρήση προοδευτικών περιβλημάτων . . . . .	59
3.4.1	Αλγόριθμος ελέγχου τομής ευθείας-τριγωνικού πλέγματος με χρήση προοδευτικού περιβλήματος . . . . .	59
3.4.2	Διαδοχικοί έλεγχοι τομής . . . . .	62
3.4.3	Αποτελέσματα . . . . .	63
3.5	Συμπεράσματα . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Απλοποίηση διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα</b>	<b>71</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	71
4.2	Σχετικές εργασίες . . . . .	72
4.3	Απλοποίηση . . . . .	73
4.3.1	Συρρίκνωση ακμής σε τετραεδρικά πλέγματα . . . . .	73
4.3.2	Σφάλμα απλοποίησης . . . . .	75
4.3.3	Εγκυρότητα συρρικνώσεων ακμών . . . . .	75
4.3.4	Διατήρηση συνόρου τετραεδρικού πλέγματος . . . . .	76
4.3.5	Διατήρηση κρίσιμων σημείων . . . . .	77
4.4	Τρόποι προσδιορισμού της νέας κορυφής . . . . .	78
4.4.1	Συρρικνώσεις ημι-ακμών . . . . .	78
4.4.2	Βελτιστοποιημένος προσδιορισμός νέας κορυφής . . . . .	79
4.5	Εκτίμηση σφάλματος . . . . .	84
4.5.1	Σύνθετο σφάλμα . . . . .	84
4.5.2	Τετραγωνικό σφάλμα . . . . .	89
4.6	Αποτελέσματα . . . . .	90
4.6.1	Μέθοδος σύγκρισης διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα . . . . .	91
4.6.2	Επιδόσεις διαμορφώσεων του αλγορίθμου . . . . .	92
4.7	Συμπεράσματα . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Υπολογισμός τομής ακτίνας-τετραέδρου</b>	<b>103</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	103
5.1.1	Συμβολισμοί . . . . .	104

5.2	Σχετικές εργασίες . . . . .	105
5.3	Εύρεση τομής ακτίνας-τριγώνου με χρήση συντεταγμένων Plücker . . . . .	106
5.3.1	Συντεταγμένες Plücker . . . . .	107
5.3.2	Εύρεση τομής ακτίνας-τριγώνου . . . . .	108
5.4	Εύρεση τομής ακτίνας-τετραέδρου με χρήση συντεταγμένων Plücker . . . . .	110
5.4.1	Βασικός αλγόριθμος . . . . .	110
5.4.2	Βελτιστοποιήσεις με απλές τροποποιήσεις του αλγορίθμου	111
5.4.3	Θεμελιώδεις βελτιστοποιήσεις . . . . .	112
5.4.4	Εξετάζοντας τη γεωμετρία του προβλήματος . . . . .	114
5.5	Αποτελέσματα . . . . .	115
5.6	Συμπεράσματα . . . . .	118
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>121</b>
	<b>Ευρετήριο</b>	<b>133</b>



## Πίνακας συμβόλων

$\mathbf{v}(x, y, z)$	Κορυφή τριγωνικού ή τετραεδρικού πλέγματος με συντεταγμένες $x, y, z$ .
$e(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$	Ακμή τριγωνικού ή τετραεδρικού πλέγματος με κορυφές $\mathbf{v}_0$ και $\mathbf{v}_1$ .
$\Delta(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$	Τρίγωνο ή όψη πλέγματος με κορυφές $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ .
$T(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$	Τετραέδρου με κορυφές $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ .
$M = (\mathcal{V}, \mathcal{D})$	Τριγωνικό πλέγμα με σύνολο κορυφών $\mathcal{V}$ και σύνολο τριγώνων $\mathcal{D}$ .
$M = (\mathcal{V}, \mathcal{T})$	Τετραεδρικό πλέγμα με σύνολο κορυφών $\mathcal{V}$ και σύνολο τετραέδρων $\mathcal{T}$ .
$\Phi = (\mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$	Διανυσματικό πεδίο εμφυτευμένο στο τετραεδρικό πλέγμα $(\mathcal{V}, \mathcal{T})$ , με $\mathcal{F}$ το σύνολο των γραμμικών παρεμβολών των τιμών του πεδίου στις κορυφές του πλέγματος.
$\mathbf{n}$	Κάθετο διάνυσμα σε επίπεδο.
$\hat{\mathbf{n}}$	Κανονικοποιημένο (μέτρου 1) κάθετο διάνυσμα σε επίπεδο.
$\Pi_{\Delta}(x, y, z)$	Εξίσωση επιπέδου (ως προς $x, y, z$ ) που ορίζεται από τις κορυφές τριγώνου $\Delta$ .
$\text{Vol}_{\Delta}(x, y, z)$	Όγκος τετραέδρου που σχηματίζεται από σημείο $(x, y, z)$ και τις κορυφές τριγώνου $\Delta$ .
$\pi_r$	Συντεταγμένες Plücker ακτίνας $r$ .





## Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ερευνητικής μου προσπάθειας των τελευταίων ετών στο χώρο των Γραφικών. Αν και «η ευθύνη των γραφομένων βαρύνει αποκλειστικά εμένα», η ολοκλήρωση της διατριβής μου δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη συμπαράσταση και τη συνεισφορά πολλών ανθρώπων, τους οποίους αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω από τη θέση αυτή.

Ο Αναπλ. Καθηγητής Χάρης Θεοχάρης επέβλεψε την έρευνά μου με επιμονή και υπομονή. Συνεισέφερε την πολύπλευρη εμπειρία του κατά την επεξεργασία των επιστημονικών εργασιών που προηγήθηκαν της διατριβής αυτής και φρόντισε, όλα αυτά τα χρόνια, να διατηρεί προσανατολισμό και προοπτική η ερευνητική μου προσπάθεια. Πάνω απ' όλα, ο Χάρης μου στάθηκε ως φίλος σε αυτή τη μακρά και δύσκολη πορεία, και γι' αυτό τον ευχαριστώ ολόψυχα.

Τις πρώτες κατευθύνσεις για την εκπόνηση της διατριβής μου τις οφείλω στον Επίκ. Καθηγητή Αλέξανδρο Μπεμ, όμως ο απροσδόκητος θάνατός του δεν του επέτρεψε να δει το αποτέλεσμά της.

Ο Καθηγητής Νικόλαος Μισυρλής και ο Λέκτορας Φίλιππος Τζαφέρης αποτέλεσαν τα άλλα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής της διατριβής μου. Τους ευχαριστώ για το χρόνο που διέθεσαν καθώς και για την υποστήριξή τους όλα τα χρόνια που ανήκω στον Τομέα Θεωρητικής Πληροφορικής. Επίσης ευχαριστώ τα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Καθηγητή Ηλία Κουτσοπούα, Καθηγητή Στέφανο Κόλλια, Αναπλ. Καθηγητή Ιωάννη Εμίρη και Αναπλ. Καθηγητή Εμμανουήλ Σαγκριώτη. Οι εύστοχες παρατηρήσεις όλων των παραπάνω συνέβαλαν στη βελτίωση του παρόντος κειμένου.

Πάντοτε ενδιαφέρουσες ήταν οι γλωσσικές και επιστημονικές παρατηρήσεις του Δρ Βασιλείου Δρακόπουλου, με τον οποίο είχαμε ευρύτερη συνεργασία.

Ο Αναπλ. Καθηγητής Βασίλειος Ζησιμόπουλος συνέβαλε στην καλύτερη κατανόηση των ζητημάτων βελτιστοποίησης που αντιμετωπίστηκαν. Ο Δρ Κωνσταντίνος Ανδρουτσόπουλος παρέσχε πηγές για την υλοποίηση των αλγορίθμων γραμμικής βελτιστοποίησης. Ο Μαθηματικός Δημήτρης Παπαχριστόπουλος παρέσχε, μεταξύ άλλων, σημαντικές λεπτομέρειες σχετικά με το μαθηματικό υπόβαθρο του αλγορίθμου των τετραγωνικών σφαλμάτων. Ο André Guézies προσέφερε πρόθυμα τη δυσεύρετη δημοσίευσή του [Gué97], και ο James Klossowski τον κώδικα υλοποίησης των  $k$ -DOPs.

Ο Επίκ. Καθηγητής Παναγιώτης Ροντογιάννης με φιλοξένησε στο γραφείο του για μεγάλο διάστημα και υπήρξε πάντοτε πηγή πολύτιμης ηθικής στήριξης, για την οποία τον ευχαριστώ θερμά. Για τη συμπαράστασή του ευχαριστώ επίσης τον Δρ Γρηγόρη Καραγιώργο. Ο συνάδελφος Παναγιώτης Κατσαλούλης έλυσε συχνά απορίες μου σχετικά με το Linux.

## Τεχνικά ζητήματα

Η στοιχειοθεσία του κειμένου της διατριβής μου έγινε με το πρόγραμμα  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , με χρήση πάμπολλων βοηθητικών πακέτων για την αρτιότερη διαμόρφωσή του. Η όλη διαδικασία ήταν μία ενδιαφέρουσα άσκηση στη δημιουργικότητα και στον προγραμματισμό.

Εργάστηκα σε λειτουργικά συστήματα Windows και Linux, όπου τα προγράμματα TeXnicCenter και Kile, αντίστοιχα, διευκόλυναν σημαντικά τη χρήση του  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ . Τα σχέδια έγιναν με το CorelDRAW, η επεξεργασία των εικόνων με το Corel PhotoPAINT και οι γραφικές παραστάσεις με το gnuplot.

Η εισαγωγή των μαθηματικών σχέσεων διευκολύνθηκε από το πακέτο `elmath` των Γιάννη Ποταμιάνου και Απόστολου Συρόπουλου, τους οποίους και ευχαριστώ για την άμεση διόρθωση σφαλμάτων που διαπίστωσα.

Για την επεξεργασία της βιβλιογραφίας χρησιμοποιήθηκε το BibTeX8 με το πακέτο `babelbib` του Harald Harders. Η μετάφραση των σχετικών όρων στα Ελληνικά καθώς και κάποιες απαραίτητες αλλαγές για την προσαρμογή του στην Ελληνική γλώσσα έγιναν από εμένα, με την υποστήριξη του συγγραφέα του πακέτου, τον οποίο επίσης ευχαριστώ.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για τις δοκιμές των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν αντλήθηκαν από διάφορες πηγές μέσω του Διαδικτύου. Στο Κεφάλαιο 3, το μοντέλο του αλόγου ανακτήθηκε από το Αρχείο μεγάλων

γεωμετρικών μοντέλων (Large Geometric Models Archive) του Ινστιτούτου Τεχνολογίας της Georgia ([http://www.cc.gatech.edu/projects/large\\_models/](http://www.cc.gatech.edu/projects/large_models/)), και τα υπόλοιπα μοντέλα από το αρχείο δειγμάτων της εταιρίας Cyberware (<http://www.cyberware.com/samples/>). Στο Κεφάλαιο 4, το μοντέλο bluntfin βρέθηκε στον ιστοχώρο της NASA (<http://www.nasa.gov/Research/Datasets/datasets.html>) και το μοντέλο του σωλήνα σε παραδείγματα χρήσης του προγράμματος OpenDX (<http://www.research.ibm.com/dx/bonuspak/html/bonuspak220.html>). Το Σχήμα 1.1 παράχθηκε με το λογισμικό απλοποίησης QSlim του M. Garland, το οποίο είναι ελεύθερα διαθέσιμο από την ιστοσελίδα <http://graphics.cs.uiuc.edu/~garland/software/qslim.html>.

*Νίκος Πλατής  
Ιανουάριος 2005*



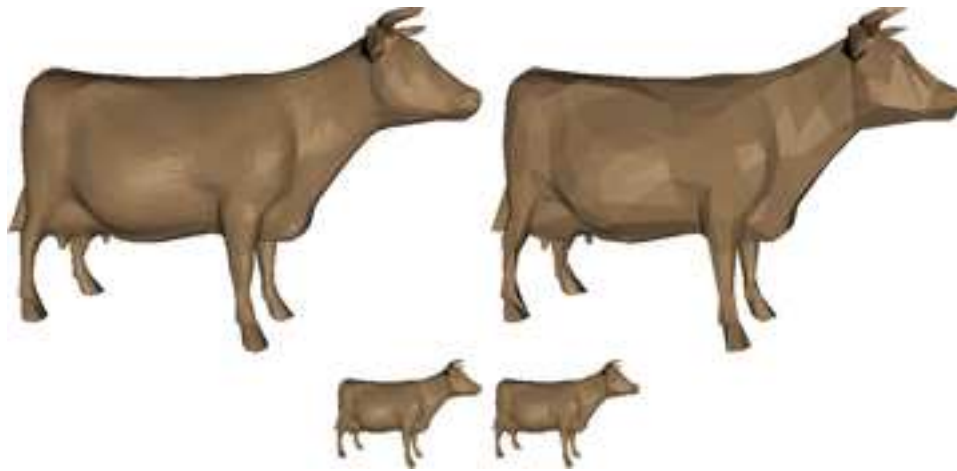
# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Πεδίο έρευνας

Βασική επιδίωξη των Γραφικών με Υπολογιστή είναι η ακριβής φωτορεαλιστική απεικόνιση τρισδιάστατων σκηνών. Για την επίτευξή της, τα αντικείμενα—επιφάνειες και όγκοι—που συμμετέχουν στις απεικονιζόμενες σκηνές πρέπει να αναπαρίστανται με μεγάλη λεπτομέρεια. Ένας από τους κυριότερους τρόπους αναπαράστασης επιφανειών και όγκων είναι τα τριγωνικά και τετραεδρικά πλέγματα, αντίστοιχα. Χάρη στην πρόοδο των τεχνικών κατασκευής τους, υπάρχουν διαθέσιμα πλέγματα εξαιρετικά μεγάλου πλήθους τριγώνων και τετραέδρων, τα οποία αποδίδουν και την παραμικρή λεπτομέρεια των αντικειμένων που αναπαριστούν.

Παρόλα αυτά, η αξιοποίηση τέτοιων πλεγμάτων είναι συχνά προβληματική, καθώς η μεγάλη ποσότητα πληροφορίας που φέρουν απαιτεί αντίστοιχα πολλούς υπολογιστικούς πόρους για την επεξεργασία της. Επιπλέον, σε πολλές εφαρμογές που τα χρησιμοποιούν διαπιστώνεται ότι η λεπτομέρεια που είναι πραγματικά χρήσιμη είναι πολύ μικρότερη, είτε συνολικά για το πλέγμα, αν για παράδειγμα η απεικόνισή του γίνεται σε πολύ μικρό μέγεθος, είτε σε τμήματά του, αν αυτά είναι μακριά από τον παρατηρητή ή δεν φαίνονται στην απεικονιζόμενη σκηνή (ΣΧΗΜΑ 1.1).

Για τους λόγους αυτούς έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι απλοποίησης τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων, που στόχο έχουν να κατασκευάζουν απλούστερα μοντέλα των αρχικών αντικειμένων, χωρίς να θυσιάζουν, όσο είναι δυνατό, την ακρίβεια της αναπαράστασης. Οι μέθοδοι αυτές παράγουν πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού αντικειμένου, και οι εφαρμογές που τα αξιοποιούν επιλέγουν δυναμικά το καταλληλότερο ανάλογα με τις απαιτήσεις τους.



— ΣΧΗΜΑ 1.1 —

*Επάνω, το μοντέλο της αγελάδας με 5.000 τρίγωνα και απλοποιημένο με 1.000 τρίγωνα. Κάτω, τα δύο προηγούμενα μοντέλα σε σμίκρυνση, όπου η διαφορά τους είναι δυσδιάκριτη.*

Οι μέθοδοι απλοποίησης χρησιμοποιούν πολλές διαφορετικές τεχνικές για την επίτευξη του στόχου τους. Μία από τις πιο επιτυχημένες τεχνικές απλοποίησης τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων εφαρμόζει διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος. Με κάθε συρρίκνωση ακμής, αυτή αντικαθίσταται από μία νέα κορυφή, και τα τρίγωνα ή τετράεδρα, αντίστοιχα, που εφάπτονταν σε αυτή αφαιρούνται από το πλέγμα. Η εφαρμογή μίας σειράς τέτοιων τοπικών απλοποιήσεων παράγει μία ακολουθία ολοένα και απλούστερων πλεγμάτων, τα οποία προσεγγίζουν με μειούμενη ακρίβεια το αρχικό αντικείμενο.

Στη διατριβή αυτή μελετούμε την απλοποίηση και επεξεργασία τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων με τη χρήση τεχνικών που βασίζονται σε διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών τους. Αναπτύσσουμε μεθόδους για την αποτελεσματική απλοποίησή τους, οι οποίες συνδυάζουν την ποιότητα και την ταχύτητα απλοποίησης. Επιπλέον αξιοποιούμε τα πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας που παράγονται από αυτές, επεκτείνοντας κατάλληλα, για το σκοπό αυτό, αλγόριθμους επεξεργασίας και απεικόνισης τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων.

## 1.2 Επισκόπηση της διατριβής

Στο Κεφάλαιο 2 που ακολουθεί δίνουμε το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για τα επόμενα. Παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες των τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων καθώς και μία επισκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας που αφορά την απλοποίησή τους. Επεκτεινόμαστε περισσότερο στις μεθόδους που χρησιμοποιούν διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών, καθώς θα τις χρησιμοποιήσουμε στο κύριο μέρος της διατριβής.

Στο Κεφάλαιο 3 επικεντρωνόμαστε στα τριγωνικά πλέγματα. Εκμεταλλευόμενοι την ευελιξία των μεθόδων απλοποίησης που βασίζονται σε συρρικνώσεις ακμών, κατασκευάζουμε διαδοχικά απλούστερα, ένθετα περιβλήματα ενός αρχικού τριγωνικού πλέγματος· ο αλγόριθμός μας εμπλουτίζει και βελτιστοποιεί σχετική προϋπάρχουσα μέθοδο με τρόπο ώστε να συγκρατώνται καλύτερα η ταχύτητα και η ποιότητα της απλοποίησης. Επίσης παρουσιάζουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί τα παραγόμενα περιβλήματα για την επιτάχυνση ελέγχων τομής γεωμετρικών στοιχείων με το αρχικό πλέγμα· το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται με πολλές διαφορετικές εκφάνσεις στα Γραφικά με Υπολογιστή και η αποτελεσματική αντιμετώπισή του είναι σημαντική. [PT03b]

Στο Κεφάλαιο 4 εστιάζουμε την προσοχή μας στην απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων. Στην περίπτωση αυτή ενδιαφέρουν πλέγματα στις κορυφές των οποίων μετρώνται ένα ή περισσότερα φυσικά μεγέθη τα οποία σχηματίζουν αντίστοιχα πεδία εμφυτευμένα στο πλέγμα. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία αντιμετωπίζει την απλοποίηση πλεγμάτων με εμφυτευμένα βαθμωτά πεδία. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που απλοποιεί τετραεδρικά πλέγματα με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, λαμβάνοντας υπ' όψιν κατά τη συρρίκνωση των ακμών τόσο τη γεωμετρία του πλέγματος όσο και το διανυσματικό πεδίο, με σκοπό τη βελτιστοποίηση του αποτελέσματος. Δίνουμε εναλλακτικούς τρόπους υλοποίησης του αλγορίθμου, ανάλογα με την επιθυμητή ταχύτητα και ποιότητα απλοποίησης. [PT04a, PT04b]

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, παρακινούμενοι από την έρευνά μας στο χώρο των τετραεδρικών πλεγμάτων, αναπτύσσουμε έναν πρωτότυπο και αποτελεσματικό αλγόριθμο εύρεσης της τομής ενός τετραέδρου με μία ευθεία. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει αντιμετωπιστεί μέχρι τώρα και η ύπαρξη ενός τέτοιου αλγορίθμου μπορεί να επιταχύνει σημαντικά την απεικόνιση και επεξεργασία τετραεδρικών

#### 4 | 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

πλεγμάτων. Επιπλέον, ο αλγόριθμός μας μπορεί να ενσωματωθεί αποτελεσματικά σε εφαρμογές που αξιοποιούν πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας του τετραεδρικού μοντέλου, όπως αυτά που κατασκευάζουμε στο Κεφάλαιο 4. [PT03a]



## 2 Αναπαράσταση και απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων

### 2.1 Βασικές έννοιες

#### 2.1.1 Αναπαράσταση επιφανειών

Οι επιφάνειες στον τρισδιάστατο χώρο αναπαρίστανται συνήθως στα Γραφικά ως πολυγωνικά μοντέλα, δηλαδή ως σύνολα επίπεδων πολυγώνων. Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα πολύγωνα για το σκοπό αυτό είναι τα τρίγωνα, καθώς είναι τα στοιχειώδη επίπεδα πολύγωνα και επιπλέον οποιοδήποτε άλλο επίπεδο πολύγωνο μπορεί εύκολα να τριγωνοποιηθεί [O'R98, CP89, GS85, NM95, Sei91a]. Στη διατριβή αυτή θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με επιφάνειες που αναπαρίστανται ως τριγωνικά μοντέλα.

#### Βασικός ορισμός

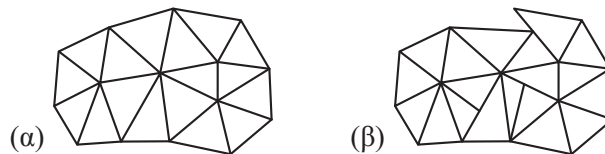
Ένα τριγωνικό μοντέλο ή τριγωνικό πλέγμα (triangular mesh)  $M = (\mathcal{V}, \mathcal{D})$  αποτελείται από ένα σύνολο σημείων (κορυφών)  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  και μία τριγωνοποίηση αυτών  $\mathcal{D} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m\}$ . Θα θεωρούμε πάντοτε ότι η συνδεσιμότητα της τριγωνοποίησης  $\mathcal{D}$  είναι σύμφωνη με τη γεωμετρία του πλέγματος, δηλαδή αν δύο κορυφές τριγώνων έχουν τις ίδιες συντεταγμένες, τότε τα τρίγωνα έχουν κοινή αυτή την κορυφή.

### Απλοειδή σύμπλοκα

Θα ασχοληθούμε μόνο με τριγωνικά πλέγματα που είναι *δισδιάστατα απλοειδή σύμπλοκα*, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό. Ένα *άπλοκο*  $\sigma$  διάστασης  $k$ , ή  *$k$ -άπλοκο* ( *$k$ -simplex*), είναι το κυρτό περίβλημα  $k + 1$  γραμμικά ανεξάρτητων σημείων  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ . Έτσι 0-άπλοκα είναι τα σημεία, 1-άπλοκα τα ευθύγραμμα τμήματα, 2-άπλοκα τα τρίγωνα και 3-άπλοκα τα τετράεδρα. Κάθε άπλοκο που ορίζεται από ένα υποσύνολο των σημείων  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  καλείται *υποάπλοκο* (*subsimplex*) του  $\sigma$ . Τα υποάπλοκα καλούνται γενικά *όψεις* (*faces*) του  $\sigma$ , και ειδικότερα οι 0-όψεις του καλούνται *κορυφές*, οι 1-όψεις *ακμές*, και οι  $(k - 1)$ -όψεις *έδρες* (*facets*). Ένα *απλοειδές σύμπλοκο* (*simplicial complex*)  $\Sigma$  διάστασης  $k$  είναι ένα σύνολο απλόκων τα οποία έχουν διαστάσεις 0 έως  $k$  και ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. Κάθε όψη ενός απλόκου του  $\Sigma$  ανήκει επίσης στο  $\Sigma$ .
2. Η τομή δύο απλόκων του  $\Sigma$  είναι κοινή όψη των δύο αυτών απλόκων.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν ένα τριγωνικό πλέγμα είναι απλοειδές σύμπλοκο, τα τρίγωνα που το αποτελούν τέμνονται μόνο κατά μήκος των ακμών τους και επίσης οι ακμές τους τέμνονται μόνο στα άκρα τους (ΣΧΗΜΑ 2.1).



— ΣΧΗΜΑ 2.1 —

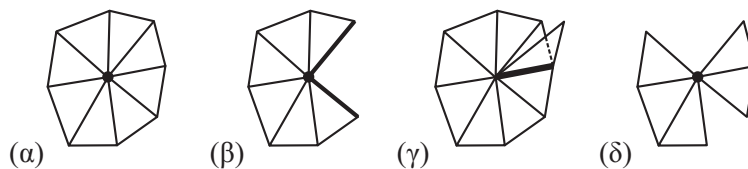
Η τριγωνοποίηση (α) είναι απλοειδές σύμπλοκο, ενώ η (β) δεν είναι.

### Συμβολισμοί

Θα συμβολίζουμε τις κορυφές ενός τριγωνικού πλέγματος ως διανύσματα-στήλες με τις συντεταγμένες τους στον τρισδιάστατο χώρο, για παράδειγμα  $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ . Επίσης θα συμβολίζουμε τις ακμές και τα τρίγωνα του πλέγματος (τα οποία θα καλούμε *όψεις* του) δίνοντας τις κορυφές στα άκρα τους: για παράδειγμα μία ακμή  $e$  με άκρα τις κορυφές  $\mathbf{v}_0$  και  $\mathbf{v}_1$  θα συμβολίζεται  $e(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$  ενώ ένα τρίγωνο  $\Delta$  με κορυφές  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  θα συμβολίζεται  $\Delta(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .

## Πολλαπλότητες

Οι τριγωνικές επιφάνειες με τις οποίες θα ασχοληθούμε θα έχουν επιπλέον την ιδιότητα να είναι **δισδιάστατες πολλαπλότητες**, απλές ή με σύνορο. Γενικά μία **πολλαπλότητα διάστασης  $k$**  ( $k$ -manifold) (αντίστοιχα, **με σύνορο**) είναι ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq k$ ) γύρω από κάθε σημείο του οποίου μπορεί να ορισθεί μία περιοχή σημείων του η οποία να είναι τοπολογικά ομοιομορφική με έναν  $k$ -δίσκο (αντίστοιχα, ή  $k$ -ημιδίσκο) (2-δίσκος είναι ο συνήθης επίπεδος δίσκος, 3-δίσκος είναι μία «γεμάτη» σφαίρα). Έτσι μία τριγωνική και γενικότερα πολυγωνική επιφάνεια είναι δισδιάστατη πολλαπλότητα (αντίστοιχα, με σύνορο) όταν κάθε ακμή της ανήκει ακριβώς σε δύο όψεις της (αντίστοιχα, εκτός από τις ακμές του συνόρου, οι οποίες ανήκουν ακριβώς σε μία όψη) και επιπλέον γύρω από κάθε κορυφή υπάρχει ένας κλειστός βρόχος όψεων (αντίστοιχα, εκτός από τις ακμές του συνόρου, γύρω από τις οποίες υπάρχει μόνο ένας ανοιχτός βρόχος όψεων). Το ΣΧΗΜΑ 2.2 παρουσιάζει τμήματα επιφανειών που επεξηγούν αυτό τον ορισμό. Για τις συνήθεις επιφάνειες στις τρεις διαστάσεις, κάθε (δισδιάστατη) πολλαπλότητα χωρίς σύνορο είναι **κλειστή επιφάνεια**, με τη συνήθη έννοια.



— ΣΧΗΜΑ 2.2 —

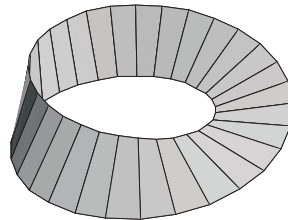
(α) Τμήμα επιφάνειας που είναι (δισδιάστατη) πολλαπλότητα. (β) Συνοριακή κορυφή πολλαπλότητας με σύνορο. (γ) Ακμή που παραβιάζει το ορισμό της πολλαπλότητας. (δ) Κορυφή που παραβιάζει τον ορισμό της πολλαπλότητας με σύνορο.

## Προσανατολισμός επιφανειών

Θα υποθέσουμε, τέλος, ότι στα τριγωνικά πλέγματα που θα χρησιμοποιήσουμε μπορεί να ορισθεί **προσανατολισμός**. Η έννοια του προσανατολισμού αφορά μόνο επιφάνειες που είναι πολλαπλότητες, και αυστηρή μαθηματική παρουσίασή της ξεφεύγει από τα όρια αυτού του εισαγωγικού κεφαλαίου. Διαισθητικά, για

μία επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις μπορεί να ορισθεί προσανατολισμός αν αυτή η επιφάνεια έχει δύο «όψεις», όπως μία σελίδα χαρτιού. Για τις επιφάνειες που συναντώνται στην πράξη είναι πάντα δυνατό να ορισθεί προσανατολισμός. Για κλειστές επιφάνειες, ο ορισμός προσανατολισμού διαχωρίζει την «εξωτερική» από την «εσωτερική» όψη τους.

Ένα παράδειγμα επιφάνειας στην οποία δεν μπορεί να ορισθεί προσανατολισμός είναι η ταινία του *Möbius* (ΣΧΗΜΑ 2.3). Αυτή έχει στην πραγματικότητα μία μόνο όψη, καθώς αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο της και κινηθούμε κατά μήκος της, θα φτάσουμε τελικά στο σημείο εκκίνησης έχοντας διατρέξει την επιφάνειά της πλήρως.



— ΣΧΗΜΑ 2.3 —  
Η ταινία του *Möbius*.

### Κάθετα διανύσματα όψεων

Ας θεωρήσουμε τώρα μία όψη  $\Delta$  ενός τριγωνικού πλέγματος, με κορυφές  $\mathbf{v}_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ . Η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν οι τρεις κορυφές είναι

$$\Pi_{\Delta}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

και μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά ως

$$\Pi_{\Delta}(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0, \quad (2.2)$$

όπου οι συντελεστές  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  προκύπτουν από το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή. Το διάνυσμα

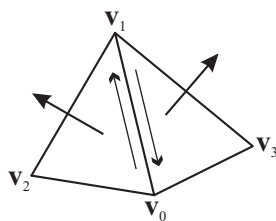
$$\mathbf{n}(a, b, c) \quad (2.3)$$

είναι ένα (μη μοναδιαίο) διάνυσμα κάθετο στην όψη  $\Delta$ . Η φορά του βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού διατρέχοντας τις κορυφές  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  με τη σειρά αυτή. Κατά σύμβαση, η όψη του τριγώνου από την οποία ξεκινά το  $\mathbf{n}$  θεωρείται η «εξωτερική» του όψη ενώ η αντίθετη θεωρείται η «εσωτερική» του. Σημειώνουμε ότι ένα τυχόν σημείο  $\bar{\mathbf{p}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  βρίσκεται στο «εξωτερικό» της όψης  $\Delta$  αν και μόνο αν ισχύει

$$\Pi_{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0. \quad (2.4)$$

Σε ένα προσανατολισμένο τριγωνικό πλέγμα, μπορεί να ορισθεί μία συνεπής διάταξη των κορυφών των τριγώνων του πάνω σε όλο το πλέγμα: αν καθορισθεί η «εξωτερική» και η «εσωτερική» όψη κάθε τριγώνου, τότε για κάθε ζεύγος γειτονικών τριγώνων η κοινή τους ακμή θα διατρέχεται με αντίθετη φορά για καθένα από αυτά αν ακολουθήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού (ΣΧΗΜΑ 2.4). Αν όμως τριγωνοποιηθεί μία επιφάνεια για την οποία δεν μπορεί να ορισθεί προσανατολισμός, όπως η ταινία του Möbius που αναφέραμε, θα υπάρχουν ζεύγη τριγώνων των οποίων η κοινή ακμή θα διατρεχθεί με την ίδια φορά.

Σχετικά με τις παραπάνω σχέσεις, σημειώνουμε επίσης ότι η απόσταση ενός



— ΣΧΗΜΑ 2.4 —

Σε ένα προσανατολισμένο τριγωνικό πλέγμα, κάθε ακμή διατρέχεται με αντίθετη φορά για καθένα από τα δύο τρίγωνα που την μοιράζονται.

σημείου  $\bar{\mathbf{p}}$  από την όψη  $\Delta$  δίνεται από τη σχέση

$$d_{\Delta}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\mathbf{n}^T \bar{\mathbf{p}} + d}{\|\mathbf{n}\|} = \hat{\mathbf{n}}^T \bar{\mathbf{p}} + \hat{d}, \quad (2.5)$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$  είναι το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα στην όψη  $\Delta$ , μέτρου 1, και  $\hat{d} = \frac{d}{\|\mathbf{n}\|}$ . Τέλος, ο όγκος του τετραέδρου που σχηματίζεται από το σημείο  $\bar{\mathbf{p}}$  και τα  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  δίνεται από τη σχέση

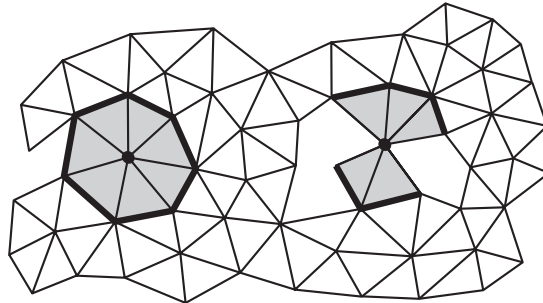
$$\text{Vol}_{\Delta}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{1}{6} \Pi_{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (2.6)$$

και έχει πρόσημο θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το αν το σημείο  $\bar{\mathbf{p}}$  βρίσκεται προς το εξωτερικό ή προς το εσωτερικό της όψης  $\Delta$ , αντίστοιχα.

### Τοπολογία τριγωνικού πλέγματος

Η τοπολογία ενός τριγωνικού πλέγματος αφορά τα χαρακτηριστικά του που σχετίζονται με τη γειτνίαση και τη συνδεσιμότητα των όψεών του. Περιλαμβάνει τις έννοιες που αναπτύξαμε προηγουμένως, όπως το αν το πλέγμα είναι απλοειδές σύμπλοκο, αν αποτελεί πολλαπλότητα, αν διαθέτει σύνορο, καθώς και αν αποτελείται από ένα ή περισσότερα ανεξάρτητα τμήματα.

Σχετικές είναι και οι έννοιες του άστρου και του συνδέσμου των κορυφών και των ακμών ενός τριγωνικού πλέγματος. Για μία κορυφή  $\mathbf{v}$  ενός τριγωνικού πλέγματος, το άστρο της (star) είναι το σύνολο των τριγώνων που προσπίπτουν σε αυτή την κορυφή. Το πλήθος αυτών των τριγώνων καλείται σθένος (valence) της κορυφής. Επίσης, σύνδεσμος (link) της κορυφής καλείται η πολυγωνική γραμμή που προκύπτει από το σύνορο του άστρου της, αν αφαιρεθούν οι ακμές που τυχόν προσπίπτουν στην κορυφή. Ο σύνδεσμος μίας κορυφής μπορεί να είναι κλειστή ή ανοικτή πολυγωνική γραμμή αποτελούμενη από ένα ή περισσότερα τμήματα (ΣΧΗΜΑ 2.5). Αντίστοιχα, για μία ακμή  $e$  ενός τριγωνικού πλέγματος, το άστρο της ορίζεται ως η ένωση των άστρων των δύο κορυφών στα άκρα της, και ο σύνδεσμός της ορίζεται ως η πολυγωνική γραμμή που προκύπτει από το σύνορο του άστρου της, αν αφαιρεθούν οι ακμές που τυχόν προσπίπτουν σε οποιοδήποτε από τα δύο άκρα της ακμής. Οι όροι αυτοί



— ΣΧΗΜΑ 2.5 —

Το άστρο (γκρι τρίγωνα) και ο σύνδεσμος (παχιά γραμμή) δύο κορυφών τριγωνικού πλέγματος. Ο σύνδεσμος της αριστερής κορυφής είναι κλειστή πολυγωνική γραμμή, ενώ ο σύνδεσμος της δεξιάς κορυφής είναι ανοικτή πολυγωνική γραμμή αποτελούμενη από δύο τμήματα.

θα συμβολίζονται με τις αγγλικές ονομασίες τους,

$\text{star}(\mathbf{v})$	$\text{valence}(\mathbf{v})$	$\text{link}(\mathbf{v})$
$\text{star}(e)$		$\text{link}(e)$

### Μη γεωμετρικά χαρακτηριστικά τριγωνικών πλεγμάτων

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε αποκλειστικά στη γεωμετρική πληροφορία των τριγωνικών πλεγμάτων, δηλαδή σε ό,τι σχετίζεται με τις κορυφές, τις ακμές και τις όψεις τους. Σε πολλές εφαρμογές των Γραφικών αυτή η πληροφορία συμπληρώνεται από άλλα δεδομένα, όπως πληροφορίες χρώματος και υλικού ή παραμετροποίηση για απόδοση υψής [FvDFH96, ΘM99]. Τα δεδομένα αυτά αποδίδονται στο πλέγμα αντιστοιχίζοντας μία τιμή ανά κορυφή ή ανά όψη: στην πρώτη περίπτωση, οι ενδιάμεσες τιμές στο εσωτερικό των όψεων προκύπτουν με παρεμβολή των τιμών στις κορυφές τους.

Στη διατριβή αυτή, λόγω της φύσης του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε (Κεφάλαιο 3), θα ασχοληθούμε μόνο με τη γεωμετρική πληροφορία των τριγωνικών πλεγμάτων.

### 2.1.2 Αναπαράσταση όγκων

Αντίστοιχα με τις επιφάνειες, οι όγκοι στα Γραφικά αναπαρίστανται ως πολυεδρικά μοντέλα, δηλαδή ως σύνολα πολυέδρων που τους διαμερίζουν και τους καλύπτουν. Η άμεση γενίκευση των τριγωνικών μοντέλων, με τα οποία, όπως είδαμε, κυρίως αναπαρίστανται οι επιφάνειες, είναι τα τετραεδρικά μοντέλα, καθώς το τετράεδρο είναι το θεμελιώδες στοιχείο όγκου στις τρεις διαστάσεις. Έτσι θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τετραεδρικά μοντέλα.

Σημειώνουμε εδώ ότι τα τετραεδρικά μοντέλα μόνο σχετικά πρόσφατα χρησιμοποιούνται ευρέως για την αναπαράσταση όγκων. Παλαιότερα χρησιμοποιούνταν κυρίως εξαεδρικά μοντέλα, αποτελούμενα από κύβους ή γενικότερα παραλληλεπίπεδα, καθώς η κατασκευή και η επεξεργασία αυτών των δομών θεωρούνταν πιο εύκολες. Παρόλα αυτά, η αύξηση της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος καθώς και άλλα χαρακτηριστικά των τετραεδρικών μοντέλων όπως η ευελιξία (έχουν τη δυνατότητα να αναπαριστούν με καλύτερη προσαρμοστικότητα τοπικές διαφοροποιήσεις του όγκου) και η γενικότητα (κάθε εξαέδρο αναλύεται με τριμμένο τρόπο σε τετράεδρα) οδήγησαν στην υιοθέτησή τους σε περισσότερες εφαρμογές.

#### Βασικός ορισμός

Ένα τετραεδρικό μοντέλο ή τετραεδρικό πλέγμα (tetrahedral mesh)  $M = (\mathcal{V}, \mathcal{T})$  αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  και μία τετραεδροποίηση αυτών  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ . Θα θεωρούμε και εδώ ότι η συνδεσιμότητα της τετραεδροποίησης  $\mathcal{T}$  είναι σύμφωνη με τη γεωμετρία του πλέγματος, δηλαδή αν δύο κορυφές τετραέδρων έχουν τις ίδιες συντεταγμένες, τότε τα τετράεδρα έχουν κοινή αυτή την κορυφή.

#### Ιδιότητες τετραεδρικών πλεγμάτων

Οι βασικές ιδιότητες που αναπτύξαμε για τα τριγωνικά πλέγματα γενικεύονται άμεσα και για τα τετραεδρικά πλέγματα. Έτσι θα απαιτούμε τα τετραεδρικά πλέγματα να είναι τρισδιάστατα απλοειδή σύμπλοκα. Επίσης θα απαιτούμε να είναι τρισδιάστατες πολλαπλότητες, και τότε μάλιστα και το σύνορό τους θα είναι δισδιάστατη πολλαπλότητα ως επιφάνεια. Είναι προφανές ότι τα τετραεδρικά πλέγματα στις τρεις διαστάσεις έχουν πάντοτε σύνορο (εκτός και αν



καταλαμβάνουν όλο το χώρο!).

Είδαμε ότι για ένα τρίγωνο, η διάταξη των κορυφών του καθορίζει τη φορά του κάθετου διανύσματος σε αυτό. Για ένα τετράεδρο πρέπει να καθοριστεί τόσο η διάταξη των κορυφών του όσο και η διάταξη των κορυφών κάθε όψης του. Αν θεωρήσουμε λοιπόν ένα τετράεδρο  $T(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ , μία συνεπής διάταξη των κορυφών στις όψεις του ώστε κάθε ακμή να διατρέχεται με αντίθετη φορά για κάθε μία από τις δύο όψεις που την μοιράζονται, είναι η εξής (αριθμούμε κάθε όψη σύμφωνα με την κορυφή που βρίσκεται απέναντί της):

$$\Delta_3(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad \Delta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3), \quad \Delta_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0), \quad \Delta_0(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad (2.7)$$

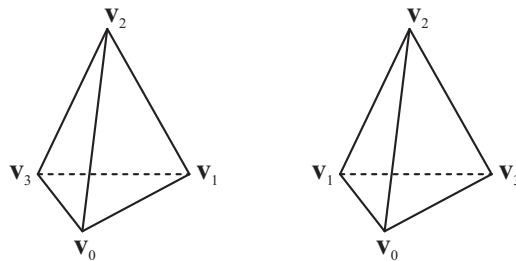
Όπως φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 2.6, υπάρχουν δύο δυνατές διατάξεις των κορυφών του τετράεδρου οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς τη φορά του κάθετου διανύσματος κάθε όψης, προς το «εξωτερικό» ή προς το «εσωτερικό» του τετράεδρου. Θα θεωρούμε ότι οι κορυφές είναι διατεταγμένες όπως στο ΣΧΗΜΑ 2.6(α), ώστε το κάθετο διάνυσμα κάθε όψης να έχει φορά προς το «εξωτερικό» του τετράεδρου. Επιπλέον, με τη διάταξη αυτή, ο όγκος του τετράεδρου  $T$ , οριζόμενος ως

$$\text{Vol}(T) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

είναι θετικός, σύμφωνα και με τα όσα έχουμε αναφέρει στη σχέση (2.4) παραπάνω.

Στα τετραεδρικά πλέγματα που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι δυνατός ο ορισμός μίας συνεπούς φοράς διαδρομής των κορυφών των τετράεδρων όλου του πλέγματος, αντίστοιχα με τα προσανατολισμένα τριγωνικά πλέγματα. Έτσι αν δύο τετράεδρα εφάπτονται σε μία κοινή όψη, οι κορυφές της όψης αυτής διατρέχονται με αντίστροφη σειρά για καθένα από τα δύο γειτονικά τετράεδρα.

Τέλος, οι έννοιες του άστρου, του συνδέσμου και του σθένους των κορυφών και των ακμών ενός τετραεδρικού πλέγματος μπορούν να ορισθούν με τρόπο εντελώς ανάλογο αυτών ενός τριγωνικού πλέγματος.



— ΣΧΗΜΑ 2.6 —

Οι δύο δυνατές διατάξεις των κορυφών ενός τετραέδρου  $T(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ : (α) το κάθετο διάνυσμα κάθε όψης έχει φορά προς το «εξωτερικό» του τετραέδρου, (β) το κάθετο διάνυσμα κάθε όψης έχει φορά προς το «εσωτερικό» του τετραέδρου.

### 2.1.2.1 Πεδία σε τετραεδρικά πλέγματα

Αντίθετα με τις επιφάνειες, όπου η γεωμετρική πληροφορία των τριγωνικών πλεγμάτων (οι θέσεις των κορυφών τους) καθορίζει απόλυτα τη μορφή τους, στους όγκους αντίστοιχη σημασία έχει μόνο η γεωμετρία του συνόρου τους καθώς οριοθετεί το χώρο που καταλαμβάνουν· αντίθετα, το εσωτερικό ενός τετραεδρικού πλέγματος μπορεί να είναι τετραεδροποιημένο με οποιοδήποτε τρόπο, χωρίς αυτό να διαφοροποιεί τον αναπαριστώμενο όγκο.

Για το λόγο αυτό, η κυριότερη χρήση των τετραεδρικών πλεγμάτων είναι για την αναπαράσταση όγκων στο εσωτερικό των οποίων είναι ορισμένα κάποια μη γεωμετρικά χαρακτηριστικά, τα οποία σχηματίζουν ένα ή περισσότερα πεδία εμφυτευμένα στο πλέγμα. Τα πεδία μπορεί να είναι βαθμωτά ή διανυσματικά και συνήθως αντιστοιχούν σε κάποιο φυσικό μέγεθος που μετράται στο εσωτερικό του όγκου, όπως θερμοκρασία, πίεση, δύναμη ή ταχύτητα, ως αποτέλεσμα κάποιου πειράματος ή προσομοίωσης. Ακόμα και αν οι τιμές των πεδίων είναι γνωστές σε όλο τον όγκο, κατά την αναπαράστασή τους με το τετραεδρικό πλέγμα θα θεωρούμε ότι δίνονται οι τιμές τους στις κορυφές του πλέγματος, ενώ στο εσωτερικό των τετραέδρων η τιμή τους θα υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή των τιμών τους στις κορυφές του τετραέδρου. Στο Κεφάλαιο 4 όπου θα μελετήσουμε την απλοποίηση τέτοιων πεδίων, θα ασχοληθούμε με διανυσματικά πεδία εμφυτευμένα σε τετραεδρικά πλέγματα, και για το λόγο αυτό οι ορισμοί μας στα επόμενα θα αφορούν αυτά.

Θα συμβολίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο εμφυτευμένο σε τετραεδρικό πλέγμα ως  $\Phi = (\mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ , όπου  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  είναι ένα σύνολο κορυφών,  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  είναι μία τετραεδροποίηση του  $\mathcal{V}$ , και  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m\}$  είναι ένα σύνολο διανυσματικών συναρτήσεων τέτοιων ώστε κάθε  $\mathbf{F}_i$  να είναι ορισμένη στο τετράεδρο  $T_i$  ως η γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών του πεδίου στις κορυφές του  $T_i$ . Θα σημειώνουμε με  $\Omega$  τον τομέα του διανυσματικού πεδίου, δηλαδή την περιοχή του χώρου που καλύπτει το  $\mathcal{T}$ .

## 2.2 Απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων

Τα τριγωνικά και τετραεδρικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται στις διάφορες εφαρμογές των Γραφικών παράγονται συνήθως με αυτοματοποιημένες μεθόδους, όπως για παράδειγμα από προγράμματα σχεδίασης με υπολογιστή, από συστήματα τρισδιάστατης σάρωσης αντικειμένων, από αλγορίθμους ανακατασκευής επιφανειών ή από διαδικασίες προσομοίωσης φυσικών φαινομένων. Λόγω του τρόπου παραγωγής τους, και με σκοπό να αποδοθεί όσο το δυνατόν καλύτερα η λεπτομέρεια των αντικειμένων που αντιπροσωπεύουν, η ανάλυση των μοντέλων, δηλαδή η πυκνότητα των τριγώνων ή τετραέδρων που τα αποτελούν, είναι εξαιρετικά μεγάλη και σχεδόν ομοιόμορφη παντού, ανεξάρτητα από τη δομή και τη μορφή τους.

Αυτή η λεπτομέρεια των μοντέλων είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου η υψηλή ποιότητα αναπαράστασης είναι απαραίτητη, όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές αρχαιοθέρησης [LPC+00]. Όμως συχνά ο τεράστιος όγκος πληροφορίας που απορρέει από την υψηλή ανάλυση των μοντέλων επιβαρύνει υπερβολικά τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους, ιδιαίτερα μάλιστα όταν απαιτείται επεξεργασία τους σε πραγματικό χρόνο όπως συμβαίνει σε πλήθος διαδραστικών εφαρμογών. Εξάλλου σε πολλές περιπτώσεις η αρχική, εξαιρετικά μεγάλη, λεπτομέρεια είναι περιττή: για παράδειγμα, όταν μία επιφάνεια ή ένας όγκος απεικονίζονται σε πολύ μικρό μέγεθος, η λεπτομέρειά τους είναι οπωσδήποτε δυσδιάκριτη (ΣΧΗΜΑ 1.1). Επιπλέον η λεπτομέρεια ενός μοντέλου μπορεί να διαφοροποιείται σε τμήματά του: επίπεδα τμήματα μίας επιφάνειας ή του συνόρου ενός όγκου μπορούν να αναπαρασταθούν με λίγα τρίγωνα χωρίς απώλεια ποιότητας: επίσης τμήματα που είναι πιο κοντά στον παρατηρητή χρειάζονται

περισσότερη λεπτομέρεια ενώ αυτά που είναι πιο μακριά, καθώς και αυτά που δεν φαίνονται σε μία δεδομένη σκηνή, χρειάζονται πολύ λιγότερη.

Για τους λόγους αυτούς έχουν αναπτυχθεί τεχνικές **απλοποίησης** τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων. Αυτές έχουν ως στόχο να παραγάγουν ένα πλέγμα με λιγότερα τρίγωνα (ή τετράεδρα) από ένα λεπτομερές αρχικό πλέγμα, με τρόπο ώστε να αποδίδεται όσο το δυνατόν πιστότερα, για τον δεδομένο αριθμό τριγώνων (ή τετράεδρων), η μορφή και η δομή της αναπαριστώμενης επιφάνειας (ή όγκου). Κατά τη χρήση απλοποιημένων πλεγμάτων αξιολογούνται συνήθως πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας (levels of detail – LOD) του αρχικού μοντέλου, και, ανάλογα με τις συγκεκριμένες απαιτήσεις και τις δυνατότητες της εφαρμογής, κάθε στιγμή επιλέγεται το καταλληλότερο από αυτά ή συνδυάζονται ώστε να διαφοροποιείται η λεπτομέρεια στην έκταση του μοντέλου.

Η ιδέα αυτή της αξιοποίησης πολλαπλών επιπέδων λεπτομέρειας των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές των Γραφικών έχει προταθεί εδώ και πολλά χρόνια [Cla76], αλλά η σχετική ερευνητική δραστηριότητα είναι αρκετά πιο πρόσφατη. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις κυριότερες μεθόδους απλοποίησης τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων που έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Πριν από αυτό, θα κάνουμε μία αναφορά στους τρόπους εκτίμησης της ποιότητας ενός απλοποιημένου τριγωνικού ή τετραεδρικού πλέγματος και στο *σφάλμα* απλοποίησης.

### 2.2.1 Σφάλμα απλοποίησης

Η εκτίμηση της ποιότητας ενός απλοποιημένου μοντέλου επιφάνειας ή όγκου ανάγεται στον ορισμό ενός μέτρου ομοιότητας του απλοποιημένου προς το αρχικό μοντέλο. Αυτό το μέτρο ομοιότητας ποσοτικοποιεί το **σφάλμα απλοποίησης**, το οποίο χρησιμεύει στην καθοδήγηση του αλγορίθμου απλοποίησης, στην αξιολόγηση του αποτελέσματός του καθώς και στη σύγκρισή του με ομοειδείς αλγορίθμους.

Τα χαρακτηριστικά που λαμβάνονται υπ' όψιν για τον ορισμό του μέτρου ομοιότητας διαφέρουν ανάλογα με την εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιείται το μοντέλο, καθώς διαφορετικοί παράγοντες είναι σημαντικοί σε κάθε περίπτωση. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο κύριους τρόπους προσέγγισης: τη σύγκριση της εμφάνισης των μοντέλων και την απευθείας σύγκριση των χαρακτηριστικών τους.

Σημειώνουμε εδώ ότι στη γενική περίπτωση της σύγκρισης δύο επιφανειών ή όγκων ανακύπτει το πρόβλημα της ευθυγράμμισής τους (alignment) ώστε η σύγκριση να γίνεται σε σωστή βάση. Στην περίπτωση όμως της σύγκρισης ενός μοντέλου με μία απλοποιημένη αναπαράστασή του, το πρόβλημα αυτό δεν υφίσταται καθώς οι αλγόριθμοι απλοποίησης εργάζονται απευθείας στο αρχικό μοντέλο και επομένως το αποτέλεσμα που παράγουν είναι αμέσως ευθυγραμμισμένο με αυτό.

### 2.2.1.1 Σύγκριση εμφάνισης

Η ομοιότητα εμφάνισης μεταξύ ενός μοντέλου και μίας απλοποιημένης αναπαράστασής του μπορεί να κριθεί από τη σύγκριση των αντίστοιχων ψηφιογραφικών (bitmap) εικόνων που λαμβάνονται για δεδομένα χαρακτηριστικά θέασης (γωνία, απόσταση, τύπος προβολής) του μοντέλου. Τέτοια στιγμιότυπα παράγονται για τις επιφάνειες με τη χρήση διάφορων αλγορίθμων φωτισμού και σκίασης [FvDFH96, OM99] ενώ για πεδία εμφυτευμένα σε τετραεδρικά πλέγματα με τη βοήθεια ποικίλων τεχνικών οπτικοποίησης δεδομένων [NHM97, CMS98]. Για να εκτιμηθεί η συνολική ομοιότητα των μοντέλων, θεωρητικά θα έπρεπε να γίνει ανάλυση σύγκριση για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς δεδομένων θέασης· κάτι τέτοιο είναι φυσικά αδύνατο, και έτσι στην πράξη η σύγκριση γίνεται μόνο για περιορισμένο αριθμό επιλεγμένων στιγμιότυπων.

Κυριότερο μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η ανάγκη προσεκτικής επιλογής των απαιτούμενων στιγμιότυπων ώστε να υπάρξει αντιπροσωπευτική σύγκριση των χαρακτηριστικών των μοντέλων, και για το λόγο αυτό δεν έχει χρησιμοποιηθεί πολύ για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μεθόδων απλοποίησης. Αποκτά όμως και πάλι χρησιμότητα στις τεχνικές απεικόνισης με τη βοήθεια εικόνων (image-based rendering) που αναπτύσσονται τα τελευταία χρόνια, οι οποίες συνδυάζουν τη χρήση πλεγμάτων χαμηλής ανάλυσης με ψηφιογραφικές τους εικόνες σε υψηλότερες αναλύσεις για να επιταχύνουν τη διαδικασία απεικόνισης.

### 2.2.1.2 Σύγκριση χαρακτηριστικών

Σε αυτή την προσέγγιση συγκρίνονται άμεσα τα δύο μοντέλα ως προς τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά και ως προς τα αντίστοιχα εμφυτευμένα πεδία,

αν υπάρχουν.

**Τριγωνικά πλέγματα** Για την περίπτωση σύγκρισης της γεωμετρίας δύο επιφανειών  $M$  και  $M'$  (όπως έχουμε αναφέρει, στις επιφάνειες θα μας απασχολήσει μόνο η γεωμετρία τους), είναι απαραίτητο να ορισθεί μία απόσταση μεταξύ τους [Gar99a]. Ορίζουμε αρχικά την απόσταση ενός σημείου  $\mathbf{v}$  από μία επιφάνεια  $M$  ως την απόστασή του από το πλησιέστερο σημείο  $\mathbf{w}$  της επιφάνειας,

$$d(\mathbf{v}, M) = \min_{\mathbf{w} \in M} \{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|\} \quad (2.9)$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι η συνήθης Ευκλείδεια απόσταση. Πλέον μπορεί να ορισθεί η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών εξετάζοντας τις αποστάσεις των σημείων τους. Για παράδειγμα, η απόσταση Hausdorff [PS85] ορίζεται ως

$$d_\infty(M, M') = \max\left(\max_{\mathbf{v} \in M} \{d(\mathbf{v}, M')\}, \max_{\mathbf{v} \in M'} \{d(\mathbf{v}, M)\}\right) \quad (2.10)$$

και μετρά τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των  $M$  και  $M'$ . Ανάλογα ορίζεται η μέση τετραγωνική απόσταση των επιφανειών,

$$d_2(M, M') = \frac{1}{s} \int_{\mathbf{v} \in M} d^2(\mathbf{v}, M') + \frac{1}{s'} \int_{\mathbf{v} \in M'} d^2(\mathbf{v}, M) \quad (2.11)$$

όπου  $s$  και  $s'$  είναι τα εμβαδά των  $M$  και  $M'$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε εδώ ότι και οι δύο αποστάσεις που ορίστηκαν είναι συμμετρικές ως προς τις δύο επιφάνειες.

Στην πράξη αυτές οι αποστάσεις δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν ακριβώς. Συνηθίζεται να γίνεται προσέγγιση αυτών, υπολογίζοντας τις επιμέρους αποστάσεις για κάποια σημεία των δύο επιφανειών δειγματοληπτικά: η δειγματοληψία αυτή πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τις κορυφές των δύο επιφανειών, καθώς και πρόσθετα σημεία αν οι απαιτήσεις για ακρίβεια είναι αυξημένες [CRS98].

**Τετραεδρικά πλέγματα** Στην περίπτωση των τετραεδρικών πλεγμάτων, όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 2.1.2.1, η γεωμετρική πληροφορία τους είναι σημαντική μόνο για το σύνορό τους. Για τη σύγκριση πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, όπως αυτά με τα οποία θα ασχοληθούμε στα

επόμενα, πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν η γεωμετρία των συνόρων τους αλλά και τα αντίστοιχα πεδία.

Έτσι για τη σύγκριση δύο τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία,  $\Phi = (\mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$  και  $\Phi' = (\mathcal{V}', \mathcal{T}', \mathcal{F}')$  με αντίστοιχους τομείς  $\Omega$  και  $\Omega'$ , η απόσταση μεταξύ τους μπορεί να αναλυθεί σε δύο παράγοντες [CCM<sup>+</sup>00]:

- Στην **απόσταση τομέα**, που χαρακτηρίζει τη διαφορά μεταξύ των τομέων  $\Omega$  και  $\Omega'$  των δύο πεδίων. Η απόσταση τομέα μπορεί να μετρηθεί ως απόσταση επιφανειών των δύο συνόρων, με τον τρόπο που αναπτύξαμε προηγουμένως.
- Στην **απόσταση πεδίου**, που χαρακτηρίζει τη διαφορά μεταξύ των διανυσματικών πεδίων. Η απόσταση πεδίου μπορεί να μετρηθεί με τις διαφορές  $\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}'(\mathbf{v})$  σε σημεία  $\mathbf{v}$  στον τομέα, για παράδειγμα από τη σχέση

$$d_F(\Phi, \Phi') = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{v} \in \Omega} \|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}'(\mathbf{v})\|^2. \quad (2.12)$$

όπου  $V$  είναι ο όγκος του  $\Omega$ . Αν οι τομείς των πεδίων διαφέρουν, θα πρέπει οι ορισμοί των παρεμβλλουσών συναρτήσεων  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{F}'$  να επεκταθούν κατάλληλα ώστε να καλύψουν τα  $\Omega'$  και  $\Omega$  αντίστοιχα και επίσης να προστεθούν ανάλογοι παράγοντες στην παραπάνω σχέση.

## 2.2.2 Απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικότερες μεθόδους απλοποίησης τριγωνικών πλεγμάτων, και θα σταθούμε ιδιαίτερα σε όσες σχετίζονται με τους αλγορίθμους που θα αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια. Για λεπτομερέστερες επισκοπήσεις της σχετικής βιβλιογραφίας παραπέμπουμε στα [PS97, Gar99a, RLB<sup>+</sup>02]. Θα κατηγοριοποιήσουμε τις μεθόδους απλοποίησης ανάλογα με την τεχνική που χρησιμοποιούν για την απλοποίηση του πλέγματος.

### 2.2.2.1 Συγχώνευση συνεπίπεδων όψεων

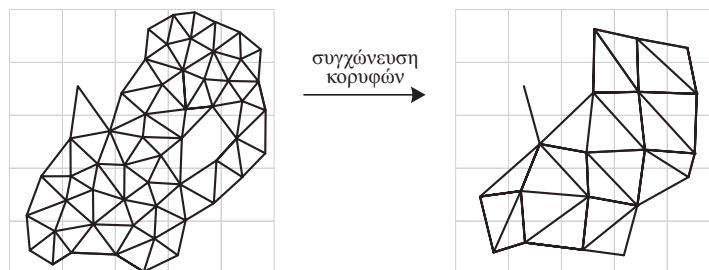
Αυτές οι μέθοδοι αναζητούν συνεπίπεδες (με κάποια ανοχή) γειτονικές όψεις του πλέγματος, τις αφαιρούν από το πλέγμα και επανατριγωνοποιούν το «κενό» που δημιουργείται, χρησιμοποιώντας λιγότερα τρίγωνα από τα αρχικά.

Στο [HH93] το κριτήριο συγχώνευσης βασίζεται στην απόκλιση των καθέτων διανυσμάτων των όψεων και επίσης προτείνεται ένας αποτελεσματικός τρόπος τριγωνοποίησης των συγχωνευόμενων όψεων. Στο [KT96] το κριτήριο συγχώνευσης επαυξάνεται με έλεγχο της απόστασης των κορυφών των όψεων, η επανατριγωνοποίηση περιλαμβάνει την απλοποίηση του συνόρου των «υπερόψεων» (“superfaces”) που δημιουργούνται και επιπλέον παρέχεται άνω όριο στο σφάλμα απλοποίησης.

Οι μέθοδοι αυτές δεν έχουν γνωρίσει μεγάλη διάδοση, καθώς παρουσιάζουν αυξημένη δυσκολία υλοποίησης, ενώ δεν υποστηρίζουν άμεσα τη δημιουργία πολλαπλών αναλύσεων του αρχικού μοντέλου.

### 2.2.2.2 Συγχώνευση κορυφών

Οι μέθοδοι συγχώνευσης κορυφών (vertex clustering) διαμερίζουν το χώρο που καταλαμβάνει η επιφάνεια, συνήθως με τη βοήθεια ορθοκανονικού πλέγματος, και συγχωνεύουν τις κορυφές που βρίσκονται σε κάθε κελί του πλέγματος σε μία νέα αντιπροσωπευτική κορυφή: η θέση της αντιπροσωπευτικής κορυφής προκύπτει συνδυάζοντας με κάποια βάρη τις θέσεις των συγχωνευόμενων κορυφών (ΣΧΗΜΑ 2.7).



— ΣΧΗΜΑ 2.7 —

Απλοποίηση τριγωνικού πλέγματος με συγχώνευση κορυφών. Οι αλλαγές στην τοπολογία του πλέγματος είναι εμφανείς.

Η πρώτη υλοποίηση τέτοιας μεθόδου παρέχεται στο [RB93]. Στο [Red96] η συγχώνευση κατευθύνεται έτσι ώστε η εμφάνιση του απλοποιημένου πλέγματος να μην διαφέρει από αυτή του αρχικού, για συγκεκριμένες συνθήκες θέασης. Στο [Lin00] προτείνεται ένας νέος τρόπος υπολογισμού της αντιπροσωπευτικής



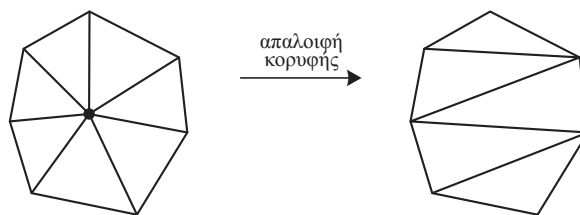
κορυφής ο οποίος βελτιώνει την ποιότητα απλοποίησης και η μέθοδος χρησιμοποιείται για την απλοποίηση πλεγμάτων εξαιρετικά μεγάλου πλήθους κορυφών. Στο [LT97] παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός τρόπος εφαρμογής αυτής της μεθόδου, με χρήση προσαρμοστικής διαμέρισης του χώρου με οκτάδενδρα (octrees) που μπορεί να αποφέρει καλύτερα αποτελέσματα. Τα οκτάδενδρα χρησιμοποιούνται επίσης στο [LE97] ως δομή ιεραρχικής διαμέρισης του χώρου για την παραγωγή πολλαπλών αναλύσεων ενός μοντέλου με μία τεχνική συγχώνευσης κορυφών, καθώς επίσης και για τον επιλεκτικό έλεγχο της λεπτομέρειας σε περιοχές του μοντέλου ανάλογα με τα χαρακτηριστικά θέασής του.

Οι μέθοδοι της ομάδας αυτής έχουν πολλά ιδιόζοντα χαρακτηριστικά που εξειδικεύουν τη χρησιμότητά τους. Κατ' αρχάς μπορούν να εφαρμοστούν σε τριγωνικά πλέγματα οποιουδήποτε τύπου, τα οποία δεν είναι απαραίτητα πολλαπλότητες, όμως πάντοτε επιφέρουν αλλαγές στην τοπολογία των πλεγμάτων που απλοποιούν με τη συγχώνευση κοντινών αλλά όχι συνδεδεμένων κορυφών. Επίσης η δυνατότητα απλοποίησης περιορίζεται από το μέγεθος των κελιών διαμέρισης του χώρου, αλλά αν αυτό γίνει πολύ μεγάλο, η ποιότητα του αποτελέσματος μειώνεται αισθητά: όπως αναφέραμε, η χρήση προσαρμοστικών ή/και ιεραρχικών δομών διαμέρισης περιορίζει το πρόβλημα αυτό.

### 2.2.2.3 Απαλοιφή κορυφών

Μία διαδοδομένη τεχνική απλοποίησης τριγωνικών πλεγμάτων απαλείφει διαδοχικά κορυφές από το πλέγμα και κάθε φορά επανατριγωνοποιεί το «κενό» που δημιουργείται χρησιμοποιώντας λιγότερα τρίγωνα από τα αρχικά (ΣΧΗΜΑ 2.8).

Η πρώτη υλοποίηση της μεθόδου [SZL92] εφαρμόζεται μόνο σε πολλαπλότη-



— ΣΧΗΜΑ 2.8 —

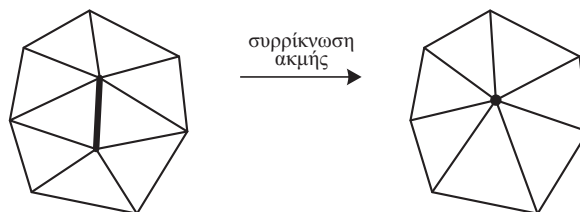
Απλοποίηση τριγωνικού πλέγματος με απαλοιφή κορυφής και επανατριγωνοποίηση του κενού που δημιουργείται.

τες, χωρίς να μπορεί να μεταβάλει την τοπολογία τους, και χρησιμοποιεί μία τοπική εκτίμηση του σφάλματος απλοποίησης υπολογίζοντάς το για την περιοχή της επιφάνειας που μεταβάλλεται με κάθε απαλοιφή κορυφής. Με κατάλληλες επεκτάσεις της μεθόδου [Sch97] έγινε δυνατή η εφαρμογή της σε επιφάνειες που δεν είναι πολλαπλότητες καθώς και η μεταβολή της τοπολογίας του πλέγματος κατά την απλοποίηση. Βελτιωμένες υλοποιήσεις [KLS96, SL96, CCMS97, KCS98] χρησιμοποιούν ακριβέστερες εκτιμήσεις του σφάλματος απλοποίησης, συσσωρεύοντας το σφάλμα κατά τα διαδοχικά βήματα απλοποίησης ώστε να εκτιμήσουν την απόσταση Hausdorff μεταξύ του αρχικού και του απλοποιημένου πλέγματος (ολική εκτίμηση σφάλματος). Ενδιαφέρουσα είναι η προσέγγιση του [CVM<sup>+</sup>96], στην οποία το απλοποιημένο πλέγμα περιορίζεται σε μία περιοχή ακτίνας  $\epsilon$  γύρω από την αρχική επιφάνεια, παρέχοντας έτσι ένα συνολικό άνω όριο σφάλματος. Τέλος, σε κάποιες εργασίες η απαλοιφή κορυφών και η επανατριγωνοποίηση κατευθύνονται έτσι ώστε να διατηρούνται και άλλα χαρακτηριστικά της επιφάνειας, όπως πεδία εμφυτευμένα σε αυτή [BS96] ή τα κάθετα διανύσματά της, τα οποία είναι δυνατόν να βελτιώσουν την οπτική ομοιότητα του απλοποιημένου προς το αρχικό μοντέλο [Kle98].

Οι μέθοδοι αυτής της ομάδας έχουν ευρύ πεδίο εφαρμογής και, ανάλογα με την υλοποίηση, μπορούν να αποφέρουν αποτελέσματα υψηλής ποιότητας. Παρέχουν άμεσα πολλαπλά επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού πλέγματος, τα οποία μπορούν να παραχθούν εφαρμόζοντας μόνο ένα μέρος των απαλοιφών κορυφών που οδήγησαν στο τελικό απλοποιημένο πλέγμα.

#### 2.2.2.4 Συρρίκνωση ακμών

Μία από τις δημοφιλέστερες τεχνικές απλοποίησης βασίζεται σε διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος: με κάθε συρρίκνωση ακμής (edge collapse), μία ακμή του πλέγματος συρρικνώνεται σε μία κορυφή και οι δύο όψεις που εφάπτονταν στην ακμή (ή μόνο μία, αν πρόκειται για συνοριακή ακμή αφαιρούνται από το πλέγμα (ΣΧΗΜΑ 2.9). Η θέση της νέας κορυφής μπορεί να είναι είτε «προκαθορισμένη», για παράδειγμα σε ένα από τα δύο άκρα της συρρικνούμενης ακμής ή στο μέσο της, ή να υπολογίζεται με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα απλοποίησης. Οι προς συρρίκνωση ακμές ταξινομούνται σε μία ουρά προτεραιότητας, με κάποιο κριτήριο που συνήθως λαμβάνει υπ' όψιν του την επίδρασή τους στο πλέγμα.



— ΣΧΗΜΑ 2.9 —

Απλοποίηση τριγωνικού πλέγματος με συρρίκνωση ακμής.

Η μέθοδος παρουσιάστηκε στα [Hop96, Hop98], όπου η θέση της νέας κορυφής υπολογίζεται με μία πολύπλοκη διαδικασία βελτιστοποίησης η οποία λαμβάνει υπ' όψιν της την ποιότητα απλοποίησης και το σχήμα των τριγώνων· επίσης γίνεται πρόβλεψη για τη διατήρηση άλλων χαρακτηριστικών του πλέγματος όπως το χρώμα, καθώς και ασυνεχειών στη γεωμετρία (πτυχώσεις) ή στα χαρακτηριστικά του πλέγματος. Αυτή η μέθοδος παράγει απλοποιημένα πλέγματα εξαιρετικής ποιότητας, με αρνητικό αντίκτυπο τον μεγάλο απαιτούμενο χρόνο επεξεργασίας. Σε άλλες υλοποιήσεις η εκτίμηση του σφάλματος είναι απλούστερη, ο χρόνος επεξεργασίας μικρότερος αλλά και τα αποτελέσματα λιγότερο ποιοτικά. Στο [AS96] η ταξινόμηση των προς συρρίκνωση ακμών γίνεται απλώς ανάλογα με το πόσο συνεπίπεδες είναι οι όψεις του άστρου τους και η νέα κορυφή τοποθετείται στο μέσο της ακμής. Στο [RR96] χρησιμοποιείται ένα κριτήριο εκτίμησης του σφάλματος που λαμβάνει υπ' όψιν του την αλλαγή στη γεωμετρία αλλά και στον προσανατολισμό των όψεων που μεταβάλλονται σε κάθε συρρίκνωση ακμής, ενώ η νέα κορυφή τοποθετείται σε ένα από τα δύο άκρα της ακμής. Πιο αξιόλογη είναι η προσέγγιση του [Gué97, Gué99] στην οποία οι ακμές ταξινομούνται απλώς με βάση το μήκος τους, όμως κατά τη συρρίκνωσή τους ελέγχονται σημαντικοί παράγοντες όπως η τοπολογία του πλέγματος, το σχήμα των τριγώνων και η απόκλιση των καθέτων διανυσμάτων των όψεων· επίσης η θέση της νέας κορυφής υπολογίζεται έτσι ώστε να διατηρείται ο συνολικός όγκος του μοντέλου ενώ συγχρόνως το σφάλμα απλοποίησης βρίσκεται μέσα σε προκαθορισμένα όρια. Στα [LT98, LT99] η θέση της νέας κορυφής υπολογίζεται ως η τομή επιπέδων τα οποία αντιστοιχούν σε λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης και σε περιορισμούς που τίθενται ως προς τη θέση της. Οι παράγοντες που εξετάζονται είναι ο όγκος του απλοποιημένου πλέγματος,

το σύνορό του (αν υπάρχει), καθώς και το σχήμα των τριγώνων του. Η μέθοδος παράγει ποιοτικά αποτελέσματα σε σχετικά μικρό χρόνο επεξεργασίας. Τέλος στα [GH97, Gar99b] η θέση της νέας κορυφής καθώς και η αντίστοιχη εκτίμηση του σφάλματος προκύπτουν από μία διαδικασία ελαχιστοποίησης της απόστασης της νέας κορυφής από τις όψεις του άστρου της συρρικνούμενης ακμής· οι απαραίτητες σχέσεις συνδυάζονται σε μία τετραγωνική μορφή, της οποίας το ελάχιστο υπολογίζεται με τη λύση ενός απλού γραμμικού συστήματος. Είναι ενδιαφέρον ότι με αυτή τη διαδικασία βελτιστοποιείται συγχρόνως και το σχήμα των παραγόμενων τριγώνων [HG99]. Η μέθοδος αυτή εύλογα καλείται **απλοποίηση με τετραγωνικά σφάλματα**· είναι εξαιρετικά γρήγορη και τα αποτελέσματά της υψηλής ποιότητας.

Οι αλγόριθμοι που αναπτύσσουμε στα Κεφάλαια 3 και 4 βασίζονται σε απλοποίηση τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών. Για το λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε στην παράγραφο 2.2.4 παρακάτω τα βασικά στοιχεία μίας τέτοιας μεθόδου απλοποίησης και θα αναλύσουμε τα χαρακτηριστικά της που θα μας φανούν χρήσιμα. Επίσης θα παρουσιάσουμε την υλοποίησή της με τετραγωνικά σφάλματα [GH97], καθώς θα τη χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 4.

### 2.2.3 Απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων

Οι τεχνικές που έχουν διερευνηθεί για την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων είναι πολύ λίγες συγκριτικά με αυτές που αφορούν τριγωνικά πλέγματα, και επίσης σχετικά πρόσφατες.

Η πρώτη προσπάθεια απλοποίησης τετραεδρικών πλεγμάτων παρουσιάζεται στο [RO96] και είναι μία μέθοδος απαλοιφής κορυφών και επανατετραεδροποίησης του κενού που δημιουργείται. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει θεωρητικές δυσκολίες, καθώς η απαιτούμενη τετραεδροποίηση δεν είναι πάντοτε εφικτή χωρίς την προσθήκη επιπλέον σημείων. Επιπλέον η πρακτική της αξία είναι μικρή, καθώς δεν ορίζει κάποιο μέτρο αξιολόγησης του σφάλματος απλοποίησης. Στο [PH97] παρουσιάζεται μία γενίκευση της μεθόδου απλοποίησης με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του [Hop96] για την απλοποίηση πολλαπλοτήτων μεγαλύτερης διάστασης. Η μέθοδος αυτή απλοποιεί μόνο τη γεωμετρία του πλέγματος και έτσι δεν είναι κατάλληλη όταν υπάρχουν εμφυτευμένα πεδία στο πλέγμα.

Οι νεότερες μέθοδοι που αντιμετωπίζουν την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα πεδία βασίζονται επίσης σε διαδοχικές συρρίκνώσεις ακμών, χάρη και στη συσσωρευμένη ερευνητική εμπειρία από την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων η οποία έχει αναδείξει την αξία τέτοιων μεθόδων. Γενικά παρατηρούμε ότι πεδίο εφαρμογής των μεθόδων που έχουν παρουσιαστεί είναι τα πλέγματα με εμφυτευμένα βαθμωτά πεδία, ενώ αυτά με ενσωματωμένα διανυσματικά πεδία δεν έχουν αντιμετωπισθεί, καθώς η απλοποίησή τους είναι αρκετά πιο σύνθετη. Επίσης κοινό γνώρισμα των περισσότερων μεθόδων είναι ότι, σε αντίθεση με την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων όπου χρησιμοποιούνται τεχνικές βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό της θέσης της κορυφής που προκύπτει από κάθε συρρίκνωση ακμής, στην απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων αυτή τοποθετείται σε «προκαθορισμένο» σημείο, όπως για παράδειγμα στο ένα από τα δύο άκρα της ακμής ή στο μέσο της. Αυτό είναι ενδεικτικό της μεγαλύτερης δυσκολίας χειρισμού των τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα πεδία, καθώς απαιτείται ταυτόχρονη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας του πλέγματος αλλά και της τιμής του πεδίου προκειμένου να προσδιοριστεί η καταλληλότερη θέση για τη νέα κορυφή και η αντίστοιχη τιμή του πεδίου.

Ο πρώτος ολοκληρωμένος αλγόριθμος για την απλοποίηση βαθμωτών πεδίων επί τετραεδρικών πλεγμάτων δίνεται στο [SG98]: οι συρρίκνώσεις ακμών ταξινομούνται με βάση ένα σύνθετο μέτρο που λαμβάνει υπ' όψιν την αλλαγή του πεδίου, τη μεταβολή του όγκου του πλέγματος καθώς και την αλλαγή στο σχήμα των τετραέδρων· επίσης προτείνεται μία αποτελεσματική τεχνική για την αποφυγή δημιουργίας αυτο-τομών (self-intersections) κατά την απλοποίηση του συνόρου του πλέγματος. Σχετικό είναι και το [KE00], όπου αναπτύσσεται μία τεχνική απλοποίησης του συνόρου ενός μη κυρτού τετραεδρικού πλέγματος χωρίς να διαταράσσεται η τοπολογία του. Στο [CL03] βασικός στόχος είναι η διατήρηση της δομής και των ιδιοτήτων του εμφυτευμένου πεδίου μέσω της διατήρησης των ισοεπιφανειών του κατά την απλοποίηση. Στα [THJW98, THJ99] προσδιορίζονται άνω φράγματα για τα σφάλματα πεδίου και τομέα που προκαλούνται από κάθε συρρίκνωση ακμής, και αυτά συσσωρεύονται κατά τη διάρκεια της απλοποίησης μέχρι ένα μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα. Η πιο εκτενής αντιμετώπιση της απλοποίησης τετραεδρικών πλεγμάτων γίνεται στο [CCM+00]. Δίνεται ο θεωρητικός ορισμός του σφάλματος απλοποίησης καθώς και πρακτική έκφραση προσέγγισής του· επιπλέον αναπτύσσονται αρκετοί τρόποι εκτίμησης

του σφάλματος κατά την απλοποίηση, οι οποίοι διαφοροποιούνται ως προς την πολυπλοκότητα και ως προς την προσφερόμενη ακρίβεια. Η πρώτη προσπάθεια βελτιστοποιημένης απλοποίησης τετραεδρικών πλεγμάτων παρουσιάζεται στο [THKJ00], όπου επεκτείνεται η μέθοδος απλοποίησης επιφανειών με τετραγωνικά σφάλματα [GH97] για την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα βαθμωτά πεδία.

Στο [CM02] γίνεται μία διαφοροποίηση της τεχνικής απλοποίησης, καθώς αυτή υλοποιείται με διαδοχικές συρρικνώσεις τετραέδρων του πλέγματος. Η μέθοδος αυτή έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά τη γεωμετρία και την τοπολογία του πλέγματος, αλλά η αντιμετώπιση του πεδίου είναι στοιχειώδης· εξάλλου, η συρρίκνωση τετραέδρων μπορεί να πραγματοποιηθεί ως ισοδύναμες διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος.

Αναφέρουμε, τέλος, ότι έχουν παρουσιαστεί μέθοδοι απλοποίησης που αντιμετωπίζουν την ειδική περίπτωση των κανονικών τετραεδροποιήσεων, αυτών δηλαδή των οποίων οι κορυφές σχηματίζουν ένα κανονικό πλέγμα [ZCK97, GSA+03].

## 2.2.4 Απλοποίηση πλεγμάτων με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τη γενική δομή και τα χαρακτηριστικά του αλγορίθμου απλοποίησης με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών, τον οποίο, όπως αναφέραμε, θα χρησιμοποιήσουμε στο κύριο μέρος της διατριβής. Ο αλγόριθμος αυτός αντιμετωπίζει εξίσου τριγωνικά και τετραεδρικά πλέγματα, αλλά για λόγους αμεσότητας η παρουσίασή μας θα εστιαστεί σε τριγωνικά πλέγματα· στην εφαρμογή του σε τετραεδρικά πλέγματα θα επανέλθουμε στο Κεφάλαιο 4, όπου θα τον χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό.

### 2.2.4.1 Αλγόριθμος απλοποίησης

Η βασική πράξη της συρρίκνωσης ακμής έχει ήδη περιγραφεί στην παράγραφο 2.2.2.4. Υπενθυμίζουμε ότι κατά τη συρρίκνωση μίας ακμής τα δύο άκρα της συνενώνονται σε μία κορυφή, ενώ διαγράφονται τα τρίγωνα που εφάπτονταν στην ακμή. Το πλέγμα μεταβάλλεται μόνο τοπικά, στα τρίγωνα του άστρου της ακμής, καθώς μία κορυφή των τριγώνων αυτών αλλάζει θέση.

## — ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1 —

*Γενικός αλγόριθμος απλοποίησης με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών.*

1. Για κάθε ακμή του πλέγματος που είναι δυνατό να συρρικνωθεί, υπολογίζουμε μία προτεραιότητα συρρίκνωσης. Ταξινομούμε όλες τις ακμές σε μία ουρά προτεραιότητας.
2. Εφόσον υπάρχουν ακμές προς συρρίκνωση στην ουρά προτεραιότητας και ο στόχος της απλοποίησης δεν έχει επιτευχθεί,
  - (α) Αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας την ακμή που βρίσκεται στην κορυφή της.
  - (β) Συρρικνώνουμε αυτή την ακμή: το τριγωνικό πλέγμα αλλάζει τοπικά στην περιοχή της ακμής, καθώς επηρεάζονται μόνο τα τρίγωνα γύρω από αυτή.
  - (γ) Επανυπολογίζουμε εκείνες τις προτεραιότητες ακμών που επηρεάστηκαν από τη συρρίκνωση της ακμής και ενημερώνουμε την ουρά προτεραιότητας.

Ο αλγόριθμος απλοποίησης πραγματοποιεί διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος, μειώνοντας με κάθε μία από αυτές τον αριθμό των τριγώνων που το αποτελούν. Σε κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής αποδίδεται μία προτεραιότητα συρρίκνωσης, η οποία είναι ανάλογη του σφάλματος που αναμένεται να επιφέρει η εφαρμογή της στο πλέγμα, και με βάση αυτήν οι ακμές ταξινομούνται σε μία ουρά προτεραιότητας. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου συρρικνώνεται η ακμή που βρίσκεται στην κορυφή της ουράς (εκείνη που έχει το μικρότερο αναμενόμενο σφάλμα). Λόγω της μεταβολής του πλέγματος στο άστρο της συρρικνούμενης ακμής, οι προτεραιότητες των γειτονικών ακμών αλλάζουν: αυτές υπολογίζονται και πάλι, και ενημερώνεται η ουρά προτεραιότητας ώστε να συνεχιστεί η απλοποίηση. Ο αλγόριθμος τερματίζεται είτε όταν αδειάσει η ουρά προτεραιότητας είτε όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο οριζόμενο από το χρήστη, όπως για παράδειγμα ένα μέγιστο επιθυμητό σφάλμα απλοποίησης ή ένα δεδομένο πλήθος όψεων του πλέγματος. Συνοπτικά η διαδικασία παρουσιάζεται στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 2.1.

Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε παράγει μία *συνεχή ακολουθία* απλοποιημένων πλεγμάτων, στο ένα άκρο της οποίας είναι το αρχικό πλέγμα  $\hat{M} = M^n$  και στο άλλο είναι το απλούστερο απλοποιημένο πλέγμα που κατασκευάζεται,  $M^0$ ,



το οποίο καλείται **βασικό πλέγμα**:

$$(\hat{M} = M^n) \xrightarrow{\text{ecol}_{n-1}} M^{n-1} \xrightarrow{\text{ecol}_{n-2}} \dots \xrightarrow{\text{ecol}_1} M^1 \xrightarrow{\text{ecol}_0} M^0.$$

(Οι συρρικνώσεις ακμών  $\text{ecol}_i$  αριθμούνται σε αντίστροφη σειρά από αυτή που πραγματοποιούνται, ώστε να συμφωνούν με το πλέγμα που παράγουν.)

Η ακολουθία των απλοποιημένων πλεγμάτων χαρακτηρίζεται *συνεχής* για να επισημανθεί ότι τα πλέγματα αυτά έχουν μεταξύ τους πολύ μικρή διαφορά—μόνο στο άστρο της συρρικνούμενης ακμής· επιπλέον, είναι δυνατό κάθε επόμενο πλέγμα στην ακολουθία να παραχθεί με «συνεχή» τρόπο από το προηγούμενο με τεχνικές γεωμορφισμού (geomorphing), δηλαδή με σταδιακή συρρίκνωση της ακμής μέχρι τα δύο άκρα της συγχωνευθούν στη νέα κορυφή [Hop96]. Σε αντιδιαστολή, ως διακριτά επίπεδα λεπτομέρειας αναφέρονται αυτά που παράγονται από μεθόδους που δεν εφαρμόζουν τοπικές απλοποιήσεις στο πλέγμα, όπως η συγχώνευση κορυφών ή όψεων. Στην περίπτωση αυτή, τα επίπεδα λεπτομέρειας είναι σχετικά λίγα, διαφέρουν αρκετά και δεν μπορούν να συσχετιστούν άμεσα μεταξύ τους· παράγονται συνήθως εφαρμόζοντας εκ νέου τους αλγορίθμους απλοποίησης στο αρχικό πλέγμα με διαφορετικές παραμέτρους τερματισμού τους.

Από την παραπάνω περιγραφή του αλγορίθμου απλοποίησης γίνεται εμφανές ότι τα δύο στοιχεία που επηρεάζουν το αποτέλεσμά του είναι τα εξής:

1. Η σειρά με την οποία θα πραγματοποιηθούν οι συρρικνώσεις ακμών, η οποία καθορίζεται από την προτεραιότητα που αποδίδεται σε κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής.
2. Για κάθε συρρίκνωση ακμής, η θέση της νέας κορυφής που θα προκύψει.

Η προτεραιότητα κάθε συρρίκνωσης ακμής αποδίδεται έτσι ώστε συρρικνώσεις που επιφέρουν μικρότερη αλλαγή στο πλέγμα να πραγματοποιούνται πρώτες, με απώτερο στόχο τη μεγαλύτερη δυνατή μείωση των τριγώνων του πλεγματος με τη μικρότερη δυνατή επίδραση σε αυτό. Συνεπώς πρέπει να υπάρχει ένας τρόπος αξιολόγησης της επίδρασης κάθε συρρίκνωσης ακμής στο πλέγμα. Στις απλούστερες υλοποιήσεις του αλγορίθμου, αυτή η αξιολόγηση βασίζεται σε στατικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα στο πόσο συνεπίπεδες είναι οι κορυφές του άστρου της ακμής ή στο μήκος της· στην περίπτωση αυτή τα δύο παραπάνω στοιχεία του αλγορίθμου είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Αντίθετα, στις πιο



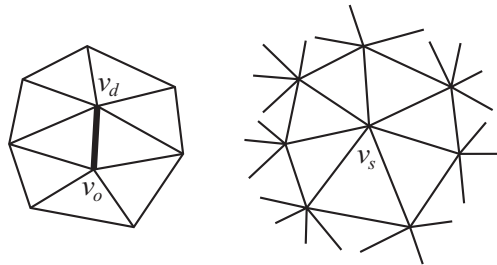
εξελιγμένες υλοποιήσεις, τα στοιχεία αυτά συμπλέκονται, καθώς η αξιολόγηση γίνεται δυναμικά, βελτιστοποιώντας τη θέση της νέας κορυφής ώστε αυτή που επιλέγεται να προσδίδει το ελάχιστο σφάλμα απλοποίησης μεταξύ των δυνατών θέσεών της· σε αυτή την περίπτωση, ως προτεραιότητα της συρρίκνωσης ακμής τίθεται εύλογα η τιμή του σφάλματος που αντιστοιχεί στη βέλτιστη θέση της.

#### 2.2.4.2 Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου

Η πολυπλοκότητα του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 2.1 καθορίζεται από το επαναληπτικό βήμα που περιέχει. Το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελούνται μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι  $O(n_E)$ , όπου  $n_E$  είναι το πλήθος ακμών του αρχικού πλέγματος. Επίσης το μήκος της ουράς προτεραιότητας είναι αρχικά περίπου  $n_E$  (κάποιες ακμές θα έχει διαπιστωθεί ότι δεν μπορούν να συρρικνωθούν) και μειώνεται σε κάθε βήμα της επανάληψης.

Θα εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας του αλγορίθμου. Αναφερόμενοι στα αντίστοιχα σημεία του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 2.1, η πολυπλοκότητα αναλύεται ως εξής:

- (α) Υποθέτοντας ότι στο βήμα αυτό το μήκος της ουράς προτεραιότητας είναι  $n_q$  (όπου  $0 \leq n_q \leq n_E$ ), τότε, αν θεωρήσουμε ότι αυτή υλοποιείται ως δυαδικός σωρός (binary heap) όπως συνηθίζεται, η αφαίρεση της ακμής από την κορυφή της έχει κόστος  $O(\log n_q)$  λόγω της ανάγκης επαναταξινόμησης του σωρού [CLR90].
- (β) Η εφαρμογή της συρρίκνωσης ακμής στο πλέγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν έχει σημαντική πολυπλοκότητα, αν χρησιμοποιείται κατάλληλη δομή για την αναπαράσταση του πλέγματος.
- (γ) Ο επανυπολογισμός των προτεραιοτήτων που αλλάζουν λόγω της συρρίκνωσης της ακμής και η επανατοποθέτησή τους στην ουρά προτεραιότητας συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος του βήματος κάθε επανάληψης. Η προτεραιότητα κάθε συρρίκνωσης ακμής εξαρτάται συνήθως από τις όψεις στο άστρο της ακμής· υποθέτοντας ότι γύρω από κάθε ακμή υπάρχουν κατά μέσο όρο  $n_s$  όψεις, τότε σε κάθε βήμα του αλγορίθμου πρέπει να επανυπολογιστούν και να ενημερωθούν  $O(n_s^2)$  προτεραιότητες ακμών (ΣΧΗΜΑ 2.10). Η πολυπλοκότητα κάθε τέτοιου



— ΣΧΗΜΑ 2.10 —

Μετά τη συρρίκνωση της ακμής  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$ , πρέπει να επανυπολογιστούν οι προτεραιότητες όλων των ακμών που έχουν ένα άκρο στα σημεία του συνδέσμου της ακμής γιατί εξαρτώνται από τις όψεις στο άστρο της κορυφής  $\mathbf{v}_s$ , οι οποίες έχουν επηρεαστεί.

υπολογισμού προτεραιότητας εξαρτάται από την υλοποίηση της μεθόδου, και θα τη θέσουμε εδώ  $f(n_s)$ . Επίσης η πολυπλοκότητα της ενημέρωσης της ουράς προτεραιότητας για κάθε αλλαγή είναι  $O(\log n_q)$  [CLR90].

Συνολικά, επομένως, η πολυπλοκότητα κάθε βήματος είναι

$$O(\log n_q) + O(n_s^2)(f(n_s) + O(\log n_q)) = O(n_s^2 f(n_s) + n_s^2 \log n_q). \quad (2.13)$$

Οι παράγοντες  $n_s$  και  $n_q$  είναι εξίσου σημαντικοί στην παραπάνω σχέση, δεδομένων των μεγεθών που υπεισέρχονται στην πράξη κατά την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων: το πλήθος των όψεων του άστρου κάθε ακμής είναι της τάξης των λίγων δεκάδων (το πολύ 10–20), ενώ το πλήθος των ακμών του πλέγματος είναι το πολύ της τάξης του εκατομμυρίου (για μεγαλύτερα πλέγματα χρησιμοποιούνται τεχνικές τμηματικής απλοποίησής τους, λόγω περιορισμών των υπολογιστικών πόρων).

Η σχέση (2.13) καταδεικνύει, επίσης, το σημαντικό ρόλο του κόστους υπολογισμού της προτεραιότητας,  $f(n_s)$ , στο συνολικό χρόνο επεξεργασίας του αλγορίθμου. Το κόστος αυτό είναι γενικά μεγάλο όταν χρησιμοποιείται αλγόριθμος βελτιστοποίησης για τον καθορισμό της νέας κορυφής και για τον υπολογισμό της προτεραιότητας, και πολύ μικρότερο όταν χρησιμοποιείται στατικός τρόπος προσδιορισμού της. Δεδομένου μάλιστα ότι οι περισσότερες από τις υπολογιζόμενες προτεραιότητες δεν θα χρησιμοποιηθούν αλλά θα ανανεωθούν σε επόμενα βήματα του αλγορίθμου, είναι εμφανής η ανάγκη εύρεσης

αποτελεσματικών μεθόδων εκτίμησης της προτεραιότητας κάθε συρρίκνωσης ακμής.

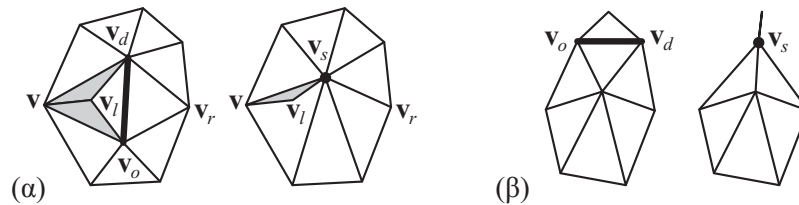
Σημειώνουμε, τέλος, ότι ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1 είναι τυπικό παράδειγμα «άπληστου» (greedy) αλγορίθμου: σε κάθε βήμα του συρρικνώνει εκείνη την ακμή που επιφέρει το ελάχιστο τοπικό σφάλμα στο πλέγμα, χωρίς να έχει καμία αντίληψη του ολικού σφάλματος· ομοίως δεν μπορεί να εξετάσει την επίδραση μίας εναλλακτικής σειράς συρρικνώσεων ακμών στο ολικό σφάλμα καθώς δεν αξιολογεί σε κανένα σημείο την μέχρι τότε πορεία του. Για να ελεγχθεί το ολικό σφάλμα απλοποίησης θα ήταν απαραίτητη μία διαδικασία ολικής βελτιστοποίησης [Tur92]: μία τέτοια διαδικασία όμως είναι αφενός, σε θεωρητικό επίπεδο, ασύμβατη με τη λειτουργία ενός αλγορίθμου βασισμένου σε διαδοχικές τοπικές απλοποιήσεις του πλέγματος, και αφετέρου, σε πρακτικό επίπεδο, ανεφάρμοστη λόγω του πλήθους των δεδομένων που υπεισέρχονται. Σημειώνουμε πάντως ότι αυτό το μειονέκτημα των αλγορίθμων που βασίζονται σε τοπικές απλοποιήσεις υπερκαλύπτονται από τα πλεονεκτήματα και τις δυνατότητες που παρέχουν τα συνεχή επίπεδα λεπτομέρειας που αυτοί παράγουν, ενώ οι αλγόριθμοι που βασίζονται σε ολική βελτιστοποίηση μπορούν να κατασκευάσουν μόνο διακριτά επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού μοντέλου.

### 2.2.4.3 Εγκυρότητα συρρίκνωσης ακμής

Η εφαρμογή μίας συρρίκνωσης ακμής είναι δυνατό να προκαλέσει μεταβολές στην τοπολογία του τριγωνικού πλέγματος, με τρόπο ώστε αυτό να απωλέσει την ιδιότητα της πολλαπλότητας. Αν και σε κάποιες περιπτώσεις κάτι τέτοιο μπορεί να μην αποτελεί πρόβλημα ή και να προβλέπεται από τον αλγόριθμο απλοποίησης, στα επόμενα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με πολλαπλότητες και συνεπώς αυτή η ιδιότητα πρέπει να διατηρείται κατά την απλοποίηση.

Η σχετική συνθήκη έχει αποδειχθεί στα [HDD<sup>+</sup>93, DEGN99] και συνοψίζεται στα εξής:

- Αν μία κορυφή  $\mathbf{v}$  γειτνιάζει και με τα δύο άκρα  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$  της ακμής που συρρικνώνεται, τότε θα πρέπει η  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d, \mathbf{v})$  να είναι όψη του πλέγματος (ΣΧΗΜΑ 2.11(α)).
- Αν και τα δύο άκρα  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$  της ακμής που συρρικνώνεται είναι στο σύνορο του πλέγματος, τότε θα πρέπει και η ίδια η ακμή  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$  να



— ΣΧΗΜΑ 2.11 —

Συρρίκνωσεις ακμών που μεταβάλλουν την τοπολογία του πλέγματος. (α) Η ακμή  $\mathbf{v}$  γειτνιάζει με τις  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$ , όμως δεν υπάρχει όψη  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d, \mathbf{v})$  στο πλέγμα: με τη συρρίκνωση της  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$  το πλέγμα παύει να είναι πολλαπλότητα καθώς «διπλώνει» στην ακμή  $e(\mathbf{v}, \mathbf{v}_s)$ . (β) Η ακμή  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$  που συρρίκνώνεται έχει και τα δύο άκρα της στο σύνορο αλλά η ίδια δεν είναι συνοριακή: με τη συρρίκνωσή της δημιουργείται τοπολογικό πρόβλημα.

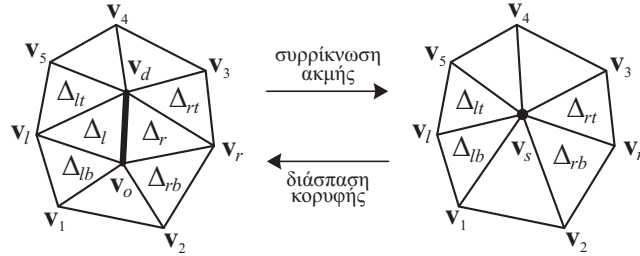
είναι στο σύνορο (ΣΧΗΜΑ 2.11(β)).

- Το πλέγμα πρέπει να έχει τουλάχιστον 5 κορυφές αν η ακμή που συρρίκνώνεται δεν έχει κανένα άκρο της στο σύνορο, ή τουλάχιστον 4 κορυφές αν έχει έστω και ένα άκρο της στο σύνορο.

#### 2.2.4.4 Διάσπαση κορυφής

Όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα, η αποτελεσματική χρήση των διαφορετικών επιπέδων λεπτομέρειας του αρχικού μοντέλου προϋποθέτει τη δυνατότητα εναλλαγής μεταξύ τους ώστε κάθε φορά να χρησιμοποιείται το καταλληλότερο. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, αυτό είναι εφικτό χάρη στη δυνατότητα αντιστροφής της συρρίκνωσης ακμής. Η αντίστροφη πράξη καλείται **διάσπαση κορυφής (vertex split)** και απεικονίζεται στο ΣΧΗΜΑ 2.12. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, κατά τη διάσπαση μίας κορυφής διαχωρίζονται ταυτόχρονα οι ακμές  $e(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_s)$  και  $e(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_r)$  του άστρου της, ενώ στο κενό που δημιουργείται τοποθετείται η νέα ακμή και επανεμφανίζονται οι όψεις του πλέγματος που εφάπτονταν σε αυτή.

Για να εφαρμοστεί επομένως μία διάσπαση κορυφής, είναι απαραίτητα κάποια στοιχεία που να προσδιορίζουν την αλλαγή που προκαλείται στο πλέγμα. Αναφερόμενοι στη διαμόρφωση του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.12, η πιο απλή παραμετροποίηση



— ΣΧΗΜΑ 2.12 —

Συρρίκνωση ακμής και η αντίστροφη της διάσπαση κορυφής.

της διάσπασης κορυφής είναι:

$$\text{vsplit}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r, \Delta_l, \Delta_r). \quad (2.14)$$

Σύμφωνα με αυτή, κατά τη διάσπαση της κορυφής  $\mathbf{v}_s$  αντικαθίσταται αυτή από τις  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$  στις όψεις του άστρου που βρίσκονται μεταξύ των ακμών  $e(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_s)$  και  $e(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_r)$  αντίστοιχα, οπότε επαναδημιουργούνται οι όψεις  $\Delta_l$  και  $\Delta_r$ . Μία εναλλακτική παραμετροποίηση η δεξιά διάσπαση κορυφής! παραμετροποίηση είναι:

$$\text{vsplit}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d, \Delta_{lt}, \Delta_{lb}, \Delta_{rt}, \Delta_{rb}, \Delta_l, \Delta_r). \quad (2.15)$$

Σύμφωνα με αυτή, η  $\mathbf{v}_s$  αντικαθίσταται από τις  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$  στις όψεις του άστρου που βρίσκονται μεταξύ των  $\Delta_{lb}$ ,  $\Delta_{rb}$  και  $\Delta_{rt}$ ,  $\Delta_{lt}$  (συμπεριλαμβανομένων) αντίστοιχα, οπότε επαναδημιουργούνται οι όψεις  $\Delta_l$  και  $\Delta_r$ .

#### 2.2.4.5 Προοδευτικά πλέγματα

Η εφαρμογή διασπάσεων κορυφών στο βασικό πλέγμα  $M^0$ , σε σειρά αντίστροφη από αυτή των αντίστοιχων συρρικνώσεων ακμών, παράγει και πάλι το αρχικό πλέγμα  $\hat{M}$  καθώς και όλη την ακολουθία των ενδιάμεσων επιπέδων λεπτομέρειας:

$$M^0 \xrightarrow{\text{vsplit}_0} M^1 \xrightarrow{\text{vsplit}_1} \dots \xrightarrow{\text{vsplit}_{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{\text{vsplit}_{n-1}} (M^n = \hat{M}).$$

Ένα προοδευτικό πλέγμα (progressive mesh) είναι μία αναπαράσταση του

πλέγματος  $\hat{M}$  που περιλαμβάνει το βασικό πλέγμα  $M^0$  και τη σειρά των διασπάσεων κορυφών  $\{\text{vsplit}_i, i = 0, 1, \dots, n - 1\}$ . Το προοδευτικό πλέγμα αναπαριστά πλήρως το αρχικό πλέγμα  $\hat{M} = M^n$ , αν εφαρμοστούν στο βασικό πλέγμα όλες οι διασπάσεις κορυφών κατά σειρά· συγχρόνως όμως μπορεί να αναπαραστήσει και οποιοδήποτε ενδιάμεσο επίπεδο λεπτομέρειας  $M^k$ , αν εφαρμοστούν μόνο οι διασπάσεις ακμών  $\text{vsplit}_i, i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι, παρόλη την επιπλέον πληροφορία που παρέχει, ένα προοδευτικό πλέγμα μπορεί να αποθηκευθεί κατά τρόπο εξαιρετικά οικονομικό ώστε να μην καταλαμβάνει πολύ περισσότερο χώρο από μία κοινή αναπαράσταση μόνο του αρχικού πλέγματος [Hop96, PR00, PRS99].

#### 2.2.4.6 Επιλεκτική εκλέπτυνση

Ένα προοδευτικό πλέγμα έχει ουσιαστικά μία γραμμική δομή: για να επιτευχθεί ένα ζητούμενο επίπεδο λεπτομέρειας πρέπει να εφαρμοστούν οι διασπάσεις κορυφών με τη σειρά που έχουν στην αναπαράστασή του, ξεκινώντας από το βασικό πλέγμα  $M^0$ . Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας εκλέπτυνσης (refinement), το πλέγμα επηρεάζεται συνολικά, ανάλογα με τις διασπάσεις κορυφών που εφαρμόζονται. Παρόλα αυτά, όπως έχουμε αναφέρει, σε πολλές εφαρμογές θα ήταν επωφελές να γίνεται μόνο τοπική εκλέπτυνση του πλέγματος ώστε να προστίθεται λεπτομέρεια σε επιλεγμένες περιοχές του.

Τα προοδευτικά πλέγματα μπορούν να υποστηρίξουν τέτοια επιλεκτική εκλέπτυνση (selective refinement), με άλλα λόγια τη δυνατότητα να εφαρμόζονται αυθαίρετες διασπάσεις κορυφών στο βασικό πλέγμα χωρίς να χρειάζεται να πραγματοποιηθούν όλες οι προηγούμενές τους στην αναπαράσταση του προοδευτικού πλέγματος. Απαραίτητη προϋπόθεση για να εφαρμοστεί μία αυθαίρετη διάσπαση κορυφής είναι να υπάρχουν στο πλέγμα όλα τα δεδομένα της παραμετροποίησής της: για παράδειγμα, αν οι διασπάσεις κορυφών είναι παραμετροποιημένες σύμφωνα με τη σχέση (2.14), θα πρέπει να υπάρχουν στο πλέγμα οι κορυφές  $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r$ , ενώ αν έχει χρησιμοποιηθεί η παραμετροποίηση (2.15), θα πρέπει να υπάρχουν η κορυφή  $\mathbf{v}_s$  και οι όψεις  $\Delta_{lb}, \Delta_{rb}, \Delta_{rt}, \Delta_{lt}$  και να γειτονεύουν όπως στο ΣΧΗΜΑ 2.12. Αν κάποια από αυτά τα στοιχεία δεν υπάρχουν στο πλέγμα, θα εμφανιστούν με κάποιες διασπάσεις κορυφών που προηγούνται στην ακολουθία του προοδευτικού πλέγματος· αυτές οι διασπάσεις πρέπει να πραγματοποιηθούν αναδρομικά, ώστε τελικά να γίνει δυνατή η εφαρμογή της

επιθυμητής διάσπασης κορυφής.

Στο [XV96] αποδεικνύεται ότι η πραγματοποίηση αυθαίρετων διασπάσεων κορυφών σύμφωνα με τις απαιτήσεις της παραμετροποίησης (2.14) είναι δυνατό να προκαλέσει τοπολογικά προβλήματα στο πλέγμα. Για το λόγο αυτό προτείνεται μία νέα συνθήκη για την εφαρμογή αυθαίρετης διάσπασης κορυφής, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να υπάρχουν στο πλέγμα όλες οι κορυφές  $\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$  του συνδέσμου και να συνδέονται με την  $\mathbf{v}_s$ . Με τον τρόπο αυτό, το άστρο της ακμής πρέπει να αποκατασταθεί πλήρως πριν αυτή επανεμφανιστεί στο πλέγμα μέσω της αντίστοιχης διάσπασης κορυφής.

Στο [Hop97], αφού επίσης επισημαίνεται η ανεπάρκεια της παραμετροποίησης (2.14), χρησιμοποιείται η παραμετροποίηση (2.15) όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για την οργάνωση των διασπάσεων κορυφών. Οι προϋποθέσεις που τίθενται με τον τρόπο αυτό είναι λιγότερο περιοριστικές από αυτές του [XV96], καθώς το άστρο της ακμής δεν αποκαθίσταται πλήρως παρά μόνο στο μέρος του που είναι απαραίτητο για τη διάσπαση της ακμής. Έτσι η διάσπαση μίας αυθαίρετης κορυφής είναι πιο αποτελεσματική, καθώς απαιτεί λιγότερες αναδρομικές διασπάσεις κορυφών, και επηρεάζει το πλέγμα σε μικρότερη έκταση: παρόλα αυτά, το γεγονός ότι δεν αποκαθιστά πλήρως το πλέγμα στην αρχική του μορφή την κάνει ακατάλληλη για κάποιες εφαρμογές, όπως αυτή που αναπτύσσουμε στο Κεφάλαιο 3.

Στα [DFMP97, DFPM97, Pup98, DFMP98] παρουσιάζεται ένα γενικό πλαίσιο επιλεκτικής εκλέπτυνσης πλεγμάτων πολλαπλών αναλύσεων που παράγονται με μία σειρά τοπικών απλοποιήσεων ενός αρχικού πλέγματος. Η υλοποίηση που παρέχεται στο [DFMP98] χρησιμοποιεί απαλοιφή κορυφών, αλλά οι δομές που αναπτύσσονται είναι συμβατές με οποιαδήποτε τοπική πράξη απλοποίησης, όπως είναι και η συρρίκνωση ακμής. Με βάση τις περιοχές του πλέγματος που επηρεάζονται από κάθε τοπική πράξη απλοποίησης, κατασκευάζεται ένας κατευθυνόμενος ακυκλικός γράφος που περιγράφει τις αλληλεξαρτήσεις τους, και οι δυνατότητες επιλεκτικής εκλέπτυνσης του πλέγματος καθορίζονται άμεσα από τομές (cuts) και διαδρομές του γράφου.

Οι παραπάνω εργασίες αντιμετωπίζουν ταυτόχρονα και την επιλεκτική εκτράχυνση (selective coarsening) ενός προοδευτικού πλέγματος, δηλαδή τη δυνατότητα να εφαρμοστούν οι συρρικνώσεις ακμών της αναπαράστασής του με αυθαίρετη σειρά σε ένα ήδη μερικώς εκλεπτυσμένο πλέγμα, ώστε να αφαιρεθεί

λεπτομέρεια από επιλεγμένες περιοχές του σύμφωνα με τις ανάγκες της εφαρμογής, για παράδειγμα κατά την αλλαγή των συνθηκών θέασης του μοντέλου. Οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί μία τυχαία συρρίκνωση ακμής είναι ανάλογες με αυτές που ισχύουν για τις τυχαίες διασπάσεις ακμών, καθώς πρέπει το πλέγμα στην περιοχή της ακμής να είναι όπως ήταν όταν η συρρίκνωση ακμής εφαρμοζόταν κατά την αρχική απλοποίηση του πλέγματος· αν αυτό δεν ισχύει, πρέπει να πραγματοποιηθούν αναδρομικά κατάλληλες συρρικνώσεις ακμών και διασπάσεις κορυφών του πλέγματος ώστε να αποκατασταθεί.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των κύριων χαρακτηριστικών της μεθόδου απλοποίησης με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών, πρέπει να σημειώσουμε ότι η επιτυχία αυτής της μεθόδου οφείλεται στην ευελιξία αλλά και στην απλότητα της βασικής πράξης απλοποίησης που χρησιμοποιεί. Η ευελιξία της εκδηλώνεται με τις διαφορετικές δυνατότητες υλοποίησής της ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής· αρκετές από αυτές παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.2.2.4 παραπάνω. Η απλότητα της συρρίκνωσης ακμής είναι πρόδηλη στην ευκολία εφαρμογής της στο τριγωνικό πλέγμα, στην απλή αντιστροφή της με τη διάσπαση κορυφής, καθώς και στην συμπαγή και αποτελεσματική κωδικοποίηση των πράξεων αυτών και του παραγόμενου προσδευτικού πλέγματος. Σε αντιδιαστολή, η απαλοιφή κορυφής, η οποία έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τη συρρίκνωση ακμής ως τοπική πράξη απλοποίησης, είναι αρκετά πιο πολύπλοκο να αντιστραφεί, καθώς περιλαμβάνει το στάδιο τριγωνοποίησης του κενού που δημιουργείται, και το οποίο μεταβάλλει τη συνδεσιμότητα του πλέγματος με τρόπο που δεν μπορεί να κωδικοποιηθεί εύκολα. Επίσης άλλες παρόμοιες πράξεις απλοποίησης που έχουν προταθεί, όπως η συρρίκνωση τριγώνων [Ham94, GHJ<sup>+</sup>98] ή τετραέδρων [CM02] (σε τετραεδρικά πλέγματα) έχουν δυσκολότερη κωδικοποίηση και ευρύτερη επίδραση στο πλέγμα, κάτι που τις κάνει λιγότερο αποτελεσματικές ιδιαίτερα κατά την επιλεκτική εκλέπτυνση και εκτρέχυνση του πλέγματος· εξάλλου αυτές οι τελευταίες πράξεις απλοποίησης μπορούν άμεσα να αντικατασταθούν από μία ισοδύναμη ακολουθία συρρικνώσεων ακμών. Χάρη σε όλα αυτά τα χαρακτηριστικά της, η συρρίκνωση ακμής έχει εδραιωθεί ως βασική τοπική πράξη απλοποίησης τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων.



### 2.2.4.7 Υλοποίηση: Απλοποίηση με τετραγωνικά σφάλματα

Αφού εξετάσαμε το γενικό πλαίσιο του αλγορίθμου απλοποίησης με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών και κατασκευής προοδευτικών πλεγμάτων, σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε την υλοποίησή του με τη μέθοδο των τετραγωνικών σφαλμάτων (quadratic error metrics) [GH97, Gar99b]. Στο Κεφάλαιο 4 θα επεκτείνουμε τη μέθοδο αυτή για την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία.

Αυτή η μέθοδος απλοποίησης τοποθετεί την κορυφή που προκύπτει από κάθε συρρίκνωση ακμής στο σημείο που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των (τετραγωνικών) αποστάσεων της από τις όψεις του άστρου της συρρικνούμενης ακμής. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνει μία καλή προσέγγιση του προηγούμενου πλέγματος σε κάθε βήμα της απλοποίησης.

Έστω  $\Delta$  ένα τρίγωνο του πλέγματος. Η τετραγωνική απόσταση ενός σημείου  $\mathbf{x}(x, y, z)$  από αυτό είναι, σύμφωνα με τη σχέση (2.5),

$$Q_{\Delta}(\mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{x} + \hat{d})^2 = \mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T) \mathbf{x} + 2\hat{d} \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{x} + \hat{d}^2.$$

Η απόσταση αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με την τετραγωνική μορφή

$$Q_{\Delta} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p) = (\hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T, \hat{d} \hat{\mathbf{n}}, \hat{d}^2)$$

έτσι ώστε

$$Q_{\Delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + p. \quad (2.16)$$

Με αυτόν το συμβολισμό, το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων του σημείου  $\mathbf{x}$  από δύο τρίγωνα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας (κατά παράγοντες) τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές  $Q_{\Delta_1} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, p_1)$  και  $Q_{\Delta_2} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, p_2)$  ως εξής:

$$\begin{aligned} Q_{\Delta_1}(\mathbf{x}) + Q_{\Delta_2}(\mathbf{x}) &= (Q_{\Delta_1} + Q_{\Delta_2})(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{x} + 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^T \mathbf{x} + (p_1 + p_2). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στο άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων είναι της ίδιας μορφής με τα επιμέρους  $Q_{\Delta}$ . Επίσης είναι εύλογο ότι η σχέση αυτή γενικεύεται για οποιοδήποτε πλήθος τριγώνων.

Στον αλγόριθμο απλοποίησης, αρχικά σε κάθε κορυφή  $\mathbf{v}$  του πλέγματος αντιστοιχίζεται μία τετραγωνική μορφή που εκφράζει το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων ενός σημείου από τις όψεις του άστρου της (η άθροιση γίνεται με βάρη ανάλογα του εμβαδού κάθε όψης για καλύτερη κλιμάκωση των υπολογισμών),

$$Q_{\mathbf{v}} = \sum_{\Delta \in \text{star}(\mathbf{v})} w_{\Delta} Q_{\Delta}. \quad (2.17)$$

Κατά τη συρρίκνωση μίας ακμής  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$ , η τετραγωνική απόσταση της νέας κορυφής  $\mathbf{v}_s$  από όλες τις όψεις του άστρου της  $e$ , δηλαδή από τις όψεις των άστρων των  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$ , είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$Q'(\mathbf{v}_s) = Q_{\mathbf{v}_o}(\mathbf{v}_s) + Q_{\mathbf{v}_d}(\mathbf{v}_s),$$

δηλαδή εκφράζεται από την τετραγωνική μορφή

$$Q' = Q_{\mathbf{v}_o} + Q_{\mathbf{v}_d}.$$

Επομένως η βέλτιστη θέση για τη  $\mathbf{v}_s$  είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την  $Q'(\mathbf{v}_s)$ .

Η  $Q'$  είναι της μορφής  $Q' = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p)$  και εύκολα αποδεικνύεται, λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο της από τη σχέση (2.16) και μηδενίζοντάς την, ότι το ελάχιστό της επιτυγχάνεται στο σημείο

$$\mathbf{v}_s = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

και έχει τιμή

$$Q'(\mathbf{v}_s) = -\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + p = \mathbf{b}^T \mathbf{v}_s + p.$$

Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δεν μπορεί να αντιστραφεί, η ελαχιστοποίηση περιορίζεται πάνω στην ακμή  $e(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$ . αν αυτό αποτύχει επίσης, η κορυφή  $\mathbf{v}_s$  τοποθετείται σε όποια από τις  $\mathbf{v}_o$  και  $\mathbf{v}_d$  δίνει τη μικρότερη τιμή στην  $Q'$ .

Ως προτεραιότητα της συρρίκνωσης ακμής τίθεται το  $Q'(\mathbf{v}_s)$ , το οποίο αποτελεί μία καλή εκτίμηση του σφάλματος απλοποίησης που επιφέρει η συρρίκνωση ακμής, καθώς εκφράζει τη συνολική τετραγωνική απόσταση της νέας κορυφής από τις όψεις του άστρου της ακμής που συρρικνώθηκε. Για τη συνέχεια του αλγορίθμου τίθεται  $Q_{\mathbf{v}_s} = Q'$  και ο αλγόριθμος συνεχίζεται όπως προηγουμέ-

νως.

Παρατηρούμε ότι, αν και η θέση της κορυφής  $\mathbf{v}_s$  προσδιορίζεται με ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, η επίλυση του προβλήματος αυτού είναι αρκετά απλή—το κυριότερο κόστος της αφορά την αντιστροφή του πίνακα  $\mathbf{A}$ , διάστασης  $3 \times 3$ . Οι υπόλοιπες απαιτούμενες πράξεις είναι λίγες, και όλα αυτά συνθέτουν έναν πολύ αποτελεσματικό αλγόριθμο.

Σημειώνουμε εδώ ότι με τις παραπάνω σχέσεις οδηγούμαστε σε υπερεκτίμηση του σφάλματος απλοποίησης, καθώς οι αποστάσεις από τις όψεις που εφάπτονται στη συρρικνούμενη ακμή υπολογίζονται στην  $Q'$  δύο φορές, από μία για τις  $Q_{\mathbf{v}_o}$  και  $Q_{\mathbf{v}_d}$  που αθροίζονται. Επιπλέον θέτοντας  $Q_{\mathbf{v}_s} = Q'$  στα επόμενα βήματα της απλοποίησης, η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχίζεται σε κάθε νέα κορυφή δεν εκφράζει την απόσταση ενός σημείου από τις όψεις του άστρου της αλλά αποτελεί μία έκφραση του συσσωρευμένου σφάλματος (άθροισμα τετραγωνικών αποστάσεων) από τις όψεις των άστρων όλων των κορυφών που αναδρομικά συγχωνεύτηκαν σε αυτή την κορυφή. Εναλλακτικά, είναι δυνατόν οι τετραγωνικές μορφές που αντιστοιχούν σε κάθε ακμή να υπολογίζονται απευθείας κάθε φορά, αθροίζοντας τις αντίστοιχες των όψεων του άστρου τους με τον τρόπο αυτό αντιμετωπίζονται τα δύο παραπάνω ζητήματα, ενώ κάποιες εργασίες έχουν δείξει ότι αυτή η διαμόρφωση του αλγορίθμου μπορεί να προσφέρει καλύτερα αποτελέσματα, έχοντας, πάντως, μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος [Hop99].



# 3 Προοδευτικά περιβλήματα για την εύρεση τομής με τριγωνικά πλέγματα

## 3.1 Εισαγωγή

Ο έλεγχος ύπαρξης τομής μεταξύ ενός τρισδιάστατου μοντέλου και μίας δεδομένης ευθείας είναι μία εξαιρετικά σημαντική διεργασία στα Γραφικά, καθώς αποτελεί τη βάση πολλών αλγορίθμων επεξεργασίας των μοντέλων, για παράδειγμα στην παρακολούθηση ακτίνας, σε τεχνικές φωτοσκίασης και άλλες. Όταν ένα τρισδιάστατο μοντέλο αναπαρίσταται με τριγωνικό πλέγμα, ένας τέτοιος έλεγχος θα απαιτούσε έλεγχο τομής κάθε τριγώνου του πλέγματος με την ευθεία, κάτι που προφανώς συνεπάγεται τεράστιο υπολογιστικό κόστος δεδομένης της πολυπλοκότητας των τριγωνικών πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι επιτάχυνσης αυτών των ελέγχων, με κοινό χαρακτηριστικό τη χρήση βοηθητικών δομών για τον περιορισμό των πραγματοποιούμενων ελέγχων τομής τριγώνου-ευθείας· τέτοιες δομές είτε διαμερίζουν το χώρο γύρω από το μοντέλο είτε το περικλείουν με απλούς περιβάλλοντες όγκους.

Σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε προοδευτικά περιβλήματα τριγωνικών πλεγμάτων, τα οποία είναι μία δομή διαδοχικών, ένθετων περιβλημάτων του αρχικού πλέγματος. Ο αλγόριθμος κατασκευής τους που παρουσιάζουμε εμπλουτίζει και βελτιστοποιεί προϋπάρχοντα σχετικό αλγόριθμο, ο οποίος βασίζεται σε κατάλληλα προσαρμοσμένες συρρικνώσεις ακμών.

Επίσης αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης τομής μεταξύ ενός τριγωνικού πλέγματος και μίας ευθείας, ο οποίος χρησιμοποιεί ως ιεραρχική δομή περιβάλλοντος όγκου το προοδευτικό περίβλημα του πλέγματος για την επιτάχυνση του ελέγχου. Ο αλγόριθμος αξιοποιεί τη δυνατότητα επιλεκτικής εκλέπτυνσης

του προοδευτικού περιβλήματος για να μειώσει τον πλήθος των πραγματοποιούμενων ελέγχων τομής.

## 3.2 Σχετικές εργασίες

### 3.2.1 Ιεραρχικές δομές για εφαρμογές εύρεσης τομής

Όπως ήδη αναφέραμε, η χρήση βοηθητικών δομών είναι απαραίτητη για την επιτάχυνση των ελέγχων τομής μεταξύ ενός τριγωνικού μοντέλου και μίας ευθείας. Οι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, σε αυτούς που χρησιμοποιούν *διαμέριση του χώρου που καλύπτει το μοντέλο και σε αυτούς που χρησιμοποιούν περιβάλλοντες όγκους του μοντέλου* [ΘΜ99, JTT01].

Οι αλγόριθμοι διαμέρισης χώρου υποδιαιρούν το χώρο που καταλαμβάνει το τριγωνικό μοντέλο σε περιοχές, οι οποίες συνήθως έχουν σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο για λόγους ευκολίας χειρισμού τους. Σε κάθε περιοχή αντιστοιχίζονται τα τρίγωνα του μοντέλου τα οποία ανήκουν έστω και μερικώς στο χώρο που αυτή καλύπτει. Κατόπιν, για τον έλεγχο τομής μίας ευθείας με το μοντέλο, εξετάζεται η τομή της με κάθε μία από αυτές τις περιοχές· αν τέμνεται με κάποια περιοχή, τότε αρκεί να εξεταστούν τα τρίγωνα του μοντέλου που έχουν αντιστοιχισθεί σε αυτή. Με τον τρόπο αυτό, τα τρίγωνα του μοντέλου που είναι απομακρυσμένα από τα σημεία τομής δεν εξετάζονται καθόλου, καθώς δεν ανήκουν σε περιοχές που τέμνονται με την ευθεία. Ο έλεγχος επιταχύνεται ακόμη περισσότερο με τη χρήση *ιεραρχικών δομών διαμέρισης του χώρου*. Η πιο συνηθισμένη τέτοια δομή είναι τα οκτάδενδρα, μία δένδροειδής δομή στην οποία οι περιοχές που έχουν περισσότερα από ένα δεδομένο πλήθος τρίγωνα υποδιαιρούνται αναδρομικά σε οκτώ νέες περιοχές, μέχρι ο αριθμός τριγώνων κάθε περιοχής να μην υπερβαίνει το όριο. Με τη βοήθεια της δομής αυτής η διαμέριση του χώρου γίνεται πιο λεπτομερής γύρω από την επιφάνεια και περιορίζονται οι έλεγχοι τομής ευθείας-τριγώνου που πραγματοποιούνται για κάθε τεμνόμενη περιοχή.

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν περιβάλλοντες όγκους του μοντέλου ακολουθούν την αντίθετη λογική. Χρησιμοποιώντας σώματα που είναι εύκολο να ελεγχθούν για τομή, όπως σφαίρες ή παραλληλεπίπεδα, καλύπτουν περιοχές

του μοντέλου δημιουργώντας έναν συνολικό όγκο που το περικλείει. Στην περίπτωση αυτή, ελέγχονται για τομή τα επιμέρους σώματα που σχηματίζουν τον περιβάλλοντα όγκο και για όσα από αυτά εντοπίζεται τομή, προχωρεί ο έλεγχος στα τρίγωνα τα οποία περικλείουν. Η διαδικασία αυτή επιταχύνεται με τη δημιουργία ιεραρχικών τέτοιων περιβαλλόντων όγκων, οι οποίες κατασκευάζονται αναδρομικά, χρησιμοποιώντας όγκους ίδιου σχήματος αλλά μεγαλύτερου μεγέθους για την κάλυψη μικρότερων.

Κατά την κατασκευή ιεραρχικών περιβαλλόντων όγκων, η επιλογή του σχήματος τους γίνεται με βάση δύο αντικρουόμενες επιδιώξεις:

1. Την καλύτερη εφαρμογή τους στο τμήμα της επιφάνειας που περικλείουν, που εκφράζεται από την ελαχιστοποίηση του κενού χώρου μεταξύ αυτών και της επιφάνειας, και
2. Την αποτελεσματικότητα του ελέγχου τομής τους με την ευθεία.

Τα απλούστερα σχήματα, όπως οι σφαίρες [Hub96] και τα ευθυγραμμισμένα με τους άξονες παραλληλεπίπεδα (axis-aligned bounding boxes – AABBs) [BKSS90] ικανοποιούν τη δεύτερη επιδίωξη αλλά αποτυγχάνουν στην πρώτη σε περιπτώσεις μακρόστενων τμημάτων του μοντέλου. Για το λόγο αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί γενικότερα παραλληλεπίπεδα (oriented bounding boxes – OBBs) [GLM96] καθώς και πολύεδρα των οποίων οι έδρες έχουν  $k$  συγκεκριμένες διευθύνσεις ( $k$ -discrete orientation polytopes –  $k$ -DOPs) [KHM+98], για τα οποία το κόστος ελέγχου τομής είναι αυξημένο αλλά και η εφαρμογή τους στην επιφάνεια πολύ καλύτερη· ιδιαίτερα τα τελευταία φαίνεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις αποτελούν την πιο αποτελεσματική δομή ιεραρχικών περιβαλλόντων όγκων.

### 3.2.2 Προοδευτικά περιβλήματα

Το προοδευτικό περίβλημα (progressive hull) [SGG+00] είναι μία ιεραρχική δομή περιβαλλόντων όγκων ενός τριγωνικού πλέγματος. Παράγεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο κατασκευής προοδευτικών πλεγμάτων, με κατάλληλο περιορισμό του ώστε τα ενδιάμεσα πλέγματα να αποτελούν μία ακολουθία διαδοχικά συνθετότερων, ένθετων περιβλημάτων του αρχικού πλέγματος, ξεκινώντας από το εξωτερικό, απλούστερο βασικό περίβλημα μέχρι το (λεπτομερέστερο)

αρχικό πλέγμα. Η εφαρμογή αυτή του αλγορίθμου περιορίζεται σε τριγωνικά πλέγματα που είναι προσανατολισμένα και κλειστά, ώστε να έχει νόημα ο ορισμός του «εξωτερικού» τους καθώς και περιβλήματος αυτών.

Ο συλλογισμός για την κατασκευή ενός προοδευτικού περιβλήματος είναι αρκετά απλός. Η συρρίκνωση ακμής, όπως έχουμε ήδη περιγράψει στο προηγούμενο κεφάλαιο, επηρεάζει το τριγωνικό πλέγμα μόνο τοπικά, στα τρίγωνα που γειτνιάζουν με την ακμή. Επομένως, αν σε κάθε συρρίκνωση ακμής εξασφαλίσουμε ότι η νέα κορυφή βρίσκεται στο εξωτερικό αυτών των τριγώνων, τότε το πλέγμα που προκύπτει θα περικλείει το προηγούμενο, αποτελώντας έτσι ένα εξωτερικό περίβλημα για αυτό. Περιορίζοντας με αυτό τον τρόπο τη διαδικασία κατασκευής προοδευτικού πλέγματος, προκύπτει μία ακολουθία περιβλημάτων του αρχικού πλέγματος με την ιδιότητα καθένα από αυτά, ξεκινώντας από το απλούστερο (όπως στον ορισμό του προοδευτικού πλέγματος, στην παράγραφο 2.2.4.5), να περιέχει όλα τα επόμενα, μέχρι το αρχικό πλέγμα:

$$M^0 \supseteq M^1 \supseteq \dots \supseteq (M^n = \hat{M}) \quad (3.1)$$

### 3.2.2.1 Εύρεση θέσης της νέας κορυφής

Ας δούμε τώρα πώς μπορεί να προσδιοριστεί η θέση της νέας κορυφής κατά τη συρρίκνωση ακμής για την κατασκευή προοδευτικού περιβλήματος. Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου έχει παρουσιαστεί σε γενικές γραμμές στο [SGG<sup>+</sup>00].

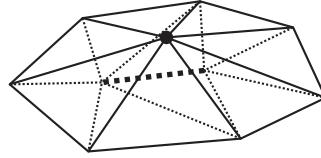
Έστω  $\mathbf{v}_s(x_s, y_s, z_s)$  η κορυφή που θα προκύψει από τη συρρίκνωση της ακμής. Υποθέτουμε ότι το άστρο της ακμής αυτής αποτελείται από τις όψεις  $\Delta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Σύμφωνα με τη σχέση (2.4) της παραγράφου 2.1.1, για να είναι η  $\mathbf{v}_s$  στο εξωτερικό των  $\Delta_i$  θα πρέπει να ισχύει

$$\Pi_{\Delta_i}(x_s, y_s, z_s) > 0 \quad \text{για όλα τα } i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι  $\Pi_{\Delta_i}(x, y, z)$  είναι η εξίσωση του επιπέδου που ορίζει η όψη  $\Delta_i$ .

Αυτές οι σχέσεις είναι γραμμικές ως προς  $x_s, y_s, z_s$  και σχηματίζουν άμεσα τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικής βελτιστοποίησης μέσω του οποίου οι άγνωστοι  $x_s, y_s, z_s$  (οι συντεταγμένες της νέας κορυφής) μπορούν να





— ΣΧΗΜΑ 3.1 —

Ο όγκος που περικλείεται μεταξύ του άστρου μίας ακμής και του άστρου της κορυφής που προκύπτει από τη συρρίκνωσή της.

προσδιοριστούν.

Μένει να αναζητηθεί μία κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση για το πρόβλημα αυτό. Η πρώτη σκέψη οδηγεί στην ελαχιστοποίηση της απόστασης της νέας κορυφής από τις όψεις του άστρου της ακμής. Αυτή δίνεται για κάθε όψη από τη σχέση (2.5) και ο υπολογισμός της έχει αυξημένη πολυπλοκότητα λόγω της ύπαρξης τετραγωνικών ριζών. Παρατηρούμε όμως ότι ο όγκος που περικλείεται μεταξύ του άστρου της συρρικνούμενης ακμής και του άστρου της νέας κορυφής (ΣΧΗΜΑ 3.1) δίνεται (επί έξι φορές) από τη σχέση

$$\sum_{i=0}^n \Pi_{\Delta_i}(x_s, y_s, z_s) \quad (3.3)$$

καθώς ισούται με το άθροισμα των όγκων των τετραέδρων που σχηματίζονται από τη νέα κορυφή και τις όψεις του άστρου της ακμής (βλ. και τη σχέση (2.6)). Η (3.3) είναι μία γραμμική σχέση ως προς τα  $x_s, y_s, z_s$  και είναι απαλλαγμένη από τις τετραγωνικές ρίζες. Ο όγκος που εκφράζει αποτελεί ένα καλό μέτρο της εγγύτητας της νέας κορυφής στα τρίγωνα του άστρου της ακμής και συνεπώς, ελαχιστοποιώντας αυτό τον όγκο, η νέα κορυφή θα είναι κοντά στα τρίγωνα του άστρου της ακμής. Επομένως, η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως η ζητούμενη αντικειμενική συνάρτηση για τον προσδιορισμό της θέσης της νέας κορυφής. Σημειώνουμε ότι για τον σχηματισμό αυτής της αντικειμενικής συνάρτησης χρειάζονται ελάχιστοι επιπλέον υπολογισμοί μετά τον υπολογισμό των περιορισμών του προβλήματος, καθώς οι συντελεστές των επιπέδων  $\Pi_{\Delta_i}$  μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν.

Συνοψίζοντας, η θέση της νέας κορυφής σε κάθε συρρίκνωση ακμής για την κατασκευή ενός προοδευτικού περιβλήματος υπολογίζεται ελαχιστοποιώντας τη

συνάρτηση (3.3) με περιορισμούς που δίνονται από τις σχέσεις (3.2). Επιπλέον, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη βέλτιστη θέση της κορυφής δίνει (έξι φορές) τον όγκο που περικλείεται μεταξύ των άστρων της συρρικνούμενης ακμής και της νέας κορυφής.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με μία γενική μέθοδο γραμμικής βελτιστοποίησης όπως η μέθοδος Simplex [ΚΦ93, PS98]. Είναι όμως πρόβλημα ειδικής μορφής, καθώς η διάστασή του (ο αριθμός των αγνώστων) είναι μικρός, μόλις 3, και το πλήθος των περιορισμών είναι επίσης σχετικά μικρό, όσο και το πλήθος των τριγώνων στο άστρο της ακμής (βλ. και την παράγραφο 3.3.2.1 παρακάτω): έτσι είναι δυνατό να εφαρμοστούν πιο εξειδικευμένες μέθοδοι για την επίλυσή του, όπως αυτή που περιγράφεται στο [Sei91b].

### 3.3 Δημιουργία προοδευτικού περιβλήματος

Για την κατασκευή του προοδευτικού περιβλήματος ενός τριγωνικού πλέγματος ακολουθούμε το γενικό ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 2.1 κατασκευής προοδευτικού πλέγματος. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις λεπτομέρειες της εφαρμογής του για το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε καθώς και τις βελτιστοποιήσεις που επιφέραμε στη βασική υλοποίηση των [SGG<sup>+</sup>00] που περιγράψαμε στην παράγραφο 3.2.2.

#### 3.3.1 Προτεραιότητα συρρίκνωσης ακμής

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.2.4.1, ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά ενός αλγορίθμου κατασκευής προοδευτικού πλέγματος είναι ο τρόπος απονομής της προτεραιότητας σε κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής. Για την κατασκευή του προοδευτικού περιβλήματος εξετάσαμε δύο εναλλακτικούς τρόπους απονομής της προτεραιότητας σε κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής.

1. Με τον πρώτο τρόπο ακολουθούμε τη φυσιολογική οδό για τον αλγόριθμο απλοποίησης, όπως γίνεται και στο [SGG<sup>+</sup>00]: υπολογίζουμε εξ αρχής τη θέση της νέας κορυφής και θέτουμε ως προτεραιότητα της υποψήφιας συρρίκνωσης τον όγκο που περικλείεται μεταξύ των άστρων της συρρικνούμενης ακμής και της νέας κορυφής, σύμφωνα με τη σχέση (3.3). Στο

πλαίσιο του αλγορίθμου μας, ο όγκος αυτός είναι ένα αξιόπιστο μέτρο της επίδρασης της συρρίκνωσης στο πλέγμα.

Αυτός ο τρόπος απονομής προτεραιότητας παρουσιάζει το μειονέκτημα του υψηλού υπολογιστικού κόστους, καθώς περιλαμβάνει την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικής βελτιστοποίησης. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.2.4.2 για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, σε κάθε βήμα του απαιτούνται πολλοί τέτοιοι υπολογισμοί προτεραιοτήτων και επομένως το συνολικό υπολογιστικό κόστος του είναι τεράστιο.

2. Με τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας προσπαθούμε να εκτιμήσουμε την επίδραση μίας συρρίκνωσης ακμής με πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Συγκεκριμένα, αντί να υπολογίσουμε τη θέση της νέας κορυφής, υπολογίζουμε ένα «κέντρο»  $\mathbf{p}_c(x_c, y_c, z_c)$  του άστρου της προς συρρίκνωση ακμής ως το μέσο όρο των σημείων του συνδέσμου της· αθροίζουμε κατ' απόλυτη τιμή τους όγκους των τετραέδρων που σχηματίζονται από το σημείο  $\mathbf{p}_c$  και από κάθε όψη  $\Delta_i$  του άστρου, και θέτουμε ως προτεραιότητα της υποψήφιας συρρίκνωσης αυτό τον συνολικό όγκο,

$$\sum_{i=0}^n |\Pi_{\Delta_i}(x_c, y_c, z_c)| \quad (3.4)$$

Αυτός ο τρόπος απονομής της προτεραιότητας είναι «στατικός», καθώς δεν λαμβάνει υπ' όψιν τη θέση της νέας κορυφής, παρά μόνο τη μορφή του άστρου της υποψήφιας ακμής. Η υπολογιζόμενη προτεραιότητα είναι μικρότερη για τις ακμές των οποίων το άστρο είναι σχετικά επίπεδο ή περιέχει μικρά τρίγωνα· η (διαισθητική) υπόθεση που κάνουμε είναι ότι τέτοιες ακμές θα συρρικνωθούν με μικρότερη επίδραση στο πλέγμα. Τα αποτελέσματα που λάβαμε, και που παρουσιάζουμε στην παράγραφο 3.3.3 παρακάτω, επιβεβαιώνουν αυτή την υπόθεση, καθώς τα παραγόμενα περιβλήματα είναι εξαιρετικά ικανοποιητικά. Το υπολογιστικό κόστος αυτού του τρόπου απονομής της προτεραιότητας είναι πολύ μικρότερο από του πρώτου, καθώς για κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής η σχέση (3.4) απαιτεί λίγες μόνο πράξεις πέραν του υπολογισμού των σχέσεων  $\Pi_{\Delta_i}$ , ενώ

η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό της θέσης της νέας κορυφής γίνεται μόνο όταν πρόκειται να εφαρμοστεί η συρρίκνωση στο πλέγμα.

### 3.3.2 Βελτιώσεις και επαυξήσεις του αλγορίθμου

Αν και τα στοιχεία του αλγορίθμου που περιγράψαμε στις παραγράφους 3.2.2.1 και 3.3.1 αρκούν για την κατασκευή του προοδευτικού περιβλήματος, κατά την υλοποίησή μας επαυξήσαμε τον αλγόριθμο με κάποια στοιχεία που στοχεύουν στην παραγωγή καλύτερου αποτελέσματος σε μικρότερο χρόνο. Τα στοιχεία αυτά περιγράφουμε σε αυτή την παράγραφο.

#### 3.3.2.1 Συνθήκες για υποψήφιες συρρικνώσεις

**Συνθήκη διατήρησης τοπολογίας** Κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής, τόσο στην αρχή όσο και κατά την επαναληπτική διαδικασία του αλγορίθμου, ελέγχεται ως προς τη βασική τοπολογική συνθήκη της παραγράφου 2.2.4.3, και αν δεν την πληροί απορρίπτεται αμέσως.

**Συνθήκη σθένους κορυφής** Περιορίζουμε το μέγιστο σθένος κάθε κορυφής σε ένα μέγιστο  $valence_{max}$ , σταθερό κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου. Η χρήση αυτού του κριτηρίου κρίθηκε απαραίτητη για πολλούς λόγους: γενικά οι κορυφές με μεγάλο σθένος προκαλούν οπτικά προβλήματα κατά τη φωτοσχίαση τριγωνικών πλεγμάτων και επιβαρύνουν τη δομή του μοντέλου· επιπλέον, μεγάλη αύξηση του σθένους θα προκαλούσε αύξηση της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου κατασκευής του προοδευτικού περιβλήματος, καθώς θα αυξανόταν το πλήθος των περιορισμών στα προβλήματα γραμμικής βελτιστοποίησης μέσω των οποίων προσδιορίζονται οι νέες ακμές.

#### 3.3.2.2 Συνθήκες για τις νέες κορυφές

Η διαδικασία βελτιστοποίησης που περιγράψαμε για τον προσδιορισμό της θέσης της νέας κορυφής δεν λαμβάνει καθόλου υπ' όψιν της την ποιότητα του παραγόμενου τριγωνικού πλέγματος· έτσι η νέα κορυφή μπορεί να δημιουργεί πολύ μακρόστενα τρίγωνα, τα οποία προκαλούν οπτικά προβλήματα κατά τη φωτοσχίαση του πλέγματος και επίσης οδηγούν σε αστάθεια των υπολογισμών,

καθώς και τρίγωνα των οποίων το κανονικό διάνυσμα διαφέρει πάρα πολύ πριν και μετά τη συρρίκνωση, κάτι που είναι πιθανό να δημιουργήσει πτυχώσεις, εσωτερικές τομές ή τοπολογικά προβλήματα στο πλέγμα. Για να αποφευχθούν αυτά τα προβλήματα, εισαγάγαμε τις επόμενες δύο συνθήκες πριν την τελική αποδοχή μίας συρρίκνωσης ακμής.

**Συνθήκη συμπαγείας των τριγώνων** Ως συμπαγεία (compactness) ενός τριγώνου εννοούμε το κατά πόσο το σχήμα του πλησιάζει σε αυτό ισόπλευρου τριγώνου. Όπως ήδη αναφέραμε, τρίγωνα με μικρή συμπαγεία, δηλαδή μακρόστενου σχήματος, δημιουργούν οπτικά και υπολογιστικά προβλήματα σε ένα τριγωνικό μοντέλο. Στον αλγόριθμό μας ελέγχουμε κατά πόσο η συμπαγεία των τριγώνων στο άστρο μίας υποψήφιας προς συρρίκνωση ακμής θα χειροτερεύσει μετά τη συρρίκνωσή της.

Ως μέτρο της συμπαγείας ενός τριγώνου χρησιμοποιούμε τη σχέση [Gué97]:

$$c = \frac{4\sqrt{3}a}{l_0^2 + l_1^2 + l_2^2}$$

όπου  $a$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου και  $l_0, l_1, l_2$  είναι τα μήκη των ακμών του· με τον τύπο αυτό ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει συμπαγεία 1 ενώ ένα τρίγωνο εκφυλισμένο σε ευθύγραμμο τμήμα έχει συμπαγεία 0. Υπολογίζουμε την ελάχιστη συμπαγεία  $c_e$  των τριγώνων του άστρου της υποψήφιας ακμής, καθώς και την ελάχιστη συμπαγεία  $c_v$  των τριγώνων στο άστρο την νέας κορυφής, και επιτρέπουμε τη συρρίκνωση της ακμής μόνο εάν ισχύει

$$\frac{c_v}{c_e} > cdev_{min} \quad (3.5)$$

όπου  $cdev_{min}$  είναι ένα κάτω φράγμα στη χειροτέρευση της συμπαγείας των τριγώνων, το οποίο τίθεται από τον χρήστη.

**Συνθήκη διατήρησης κανονικού διανύσματος** Η δεύτερη συνθήκη αποβλέπει στην απόρριψη συρρικνώσεων ακμών που θα οδηγήσουν σε σημαντικές αλλαγές στην κατεύθυνση των κανονικών διανυσμάτων των τριγώνων που θα μεταβληθούν κατά την εφαρμογή τους στο πλέγμα.

Σε κάθε τρίγωνο του άστρου της προς συρρίκνωση ακμής αντιστοιχίζουμε

το τρίγωνο του άστρου της νέας κορυφής με το οποίο μοιράζονται την ίδια ακμή του (κοινού) συνδέσμου τους. Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των κανονικών διανυσμάτων των δύο αυτών τριγώνων,  $\mathbf{n}_e$  και  $\mathbf{n}_v$  αντίστοιχα, το οποίο δίνει το συνημίτονο της απόκλισης μεταξύ τους. Η συρρίκνωση ακμής γίνεται αποδεκτή μόνο εάν αυτή η απόκλιση είναι μικρότερη από μία γωνία  $\theta_{max}$  καθοριζόμενη από το χρήστη:

$$\cos^{-1}(\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_v) < \theta_{max} \Leftrightarrow \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_v > \cos(\theta_{max}) \quad (3.6)$$

Η γωνία  $\theta_{max}$  πρέπει να ανήκει στο διάστημα  $[0, \pi/2]$  ώστε να αποφευχθούν πτυχώσεις στο πλέγμα.

Οι δύο συνθήκες που αναλύσαμε σε αυτή την παράγραφο θα ήταν ίσως επιθυμητό να συμπεριληφθούν ως περιορισμοί στο πρόβλημα βελτιστοποίησης από το οποίο καθορίζεται η θέση της νέας κορυφής· η έκφρασή τους όμως θα απαιτούσε τετραγωνικούς περιορισμούς, κάτι που θα αύξανε πολύ το υπολογιστικό κόστος επίλυσης του προβλήματος. Δεδομένης της θετικής συμβολής ανάλογων συνθηκών στην ποιότητα προοδευτικών πλεγμάτων, όπως έχει καταδειχθεί και από άλλες εργασίες [Gué97, LT98], θεωρήσαμε σκόπιμο να εντάξουμε αυτές τις συνθήκες στον αλγόριθμο κατασκευής προοδευτικών περιβλημάτων με τη μορφή των περιορισμών που περιγράψαμε.

### 3.3.2.3 Βελτιστοποίηση της υλοποίησης

**Δομή δεδομένων ουράς προτεραιότητας** Στη γενική περιγραφή του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 2.1 αναφέραμε ότι οι υποψήφιες συρρικνώσεις ακμών τοποθετούνται σε μία ουρά προτεραιότητας. Οι περισσότεροι συγγραφείς δεν δίνουν λεπτομέρειες σχετικά με το θέμα αυτό, και έτσι πιθανολογούμε ότι χρησιμοποιούν την τυπική υλοποίηση της ουράς προτεραιότητας με δυαδικό σωρό.

Διαπιστώσαμε ότι υλοποιώντας την ουρά προτεραιότητας με κόκκινο-μαύρο δέντρο υπάρχει βελτίωση στις επιδόσεις του αλγορίθμου. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η πολυπλοκότητα των βασικών πράξεων και των δύο αυτών δομών είναι  $O(\log n_q)$  όπου  $n_q$  είναι το πλήθος των στοιχείων της δομής [CLR90, Mis02]. Στην περίπτωση του αλγορίθμου μας, οι πράξεις που εκτελούνται πιο συχνά στη δομή είναι διαγραφές και ενημερώσεις, καθώς σε κάθε βήμα αφαιρούνται

από την ουρά δύο ακμές και ενημερώνονται  $O(\text{valence}_{max}^2)$  ακμές, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.2.4.2. Συνάγουμε λοιπόν ότι η καλύτερη εσωτερική ταξινόμηση του κόκκινου-μαύρου δέντρου βελτιώνει τις επιδόσεις της ουράς.

**Βελτιστοποίηση υπολογισμών** Όπως είναι εμφανές από την ανάλυση που προηγήθηκε στις παραγράφους 3.2.2.1 και 3.3.1, οι εξισώσεις  $\Pi_{\Delta_i}$  των επιπέδων των όψεων  $\Delta_i$  του πλέγματος χρησιμοποιούνται πολλαπλά κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου, οποιοσδήποτε τρόπος υπολογισμού της προτεραιότητας και αν χρησιμοποιηθεί. Για το λόγο αυτό, οι ποσότητες αυτές προϋπολογίζονται για κάθε όψη  $\Delta_i$  και ενημερώνονται μόλις κάποια μεταβληθεί, ώστε να μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι οι συνθήκες των παραγράφων 3.3.2.1 και 3.3.2.2 ελέγχονται από την απλούστερη προς την πολυπλοκότερη με τον τρόπο αυτό, οι απορρίψεις των συρρικνώσεων ακμών γίνονται με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

### 3.3.3 Αποτελέσματα

Για να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου κατασκευής προοδευτικών περιβλημάτων, τον εφαρμόσαμε σε έξι τριγωνικά μοντέλα διαφορετικού πλήθους όψεων και γεωμετρικής πολυπλοκότητας: ένα μηχανικό **εξάρτημα** (20.088 όψεις), ένα **κατσαβίδι** (54.300 όψεις), έναν **δεινόσαυρο** (84.288 όψεις), ένα **άλογο** (96.966 όψεις), μία κεφαλή **Υγείας** (134.342 όψεις) και ένα τμήμα μηριαίου **οστού** (274.120 όψεις). Για καθένα από αυτά τα μοντέλα κατασκευάσαμε προοδευτικά περιβλήματα σε διαφορετικά επίπεδα λεπτομέρειας και αναλύσαμε τόσο το χρόνο κατασκευής τους όσο και την ποιότητά τους ως περιβαλλόντων όγκων, μετρώντας πόσο ερμητικά περικλείουν τα αρχικά μοντέλα.

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω, ο αλγόριθμός μας δέχεται κάποιες παραμέτρους από το χρήστη, οι οποίες ελέγχουν ως ένα βαθμό το παραγόμενο περίβλημα. Αυτές είναι το μέγιστο σθένος των κορυφών  $\text{valence}_{max}$ , το κάτω φράγμα στη χειροτέρευση της συμπάγειας των όψεων  $cdev_{min}$  και η μέγιστη απόκλιση των κανονικών διανυσμάτων των όψεων  $\theta_{max}$ . Για τις περισ-

σότερες δοκιμές μας χρησιμοποιήσαμε τις εξής τιμές αυτών των παραμέτρων:

$$\begin{aligned} \text{valence}_{max} &= 12 \\ cdev_{min} &= 0,8 \\ \theta_{max} &= \pi/4 \end{aligned}$$

Ως προς την επιλογή αυτών των τιμών, για την  $\text{valence}_{max}$  σημειώνουμε ότι συνήθως στα τριγωνικά πλέγματα που συναντώνται στην πράξη οι κορυφές έχουν σθένος 6 ως 8, επομένως η τιμή 12 επιτρέπει τη συγκέντρωση αρκετών όψεων γύρω από κάθε κορυφή ώστε να μην εμποδίζεται η απλοποίηση, ενώ συγχρόνως είναι αρκετά μικρή ώστε να μην εμφανίζονται τα προβλήματα που σχετίζονται με πολύ υψηλές τιμές του σθένους τα οποία αναφέραμε στην παράγραφο 3.3.2.1. Η τιμή της  $cdev_{min}$  επιτρέπει σταδιακή αλλά όχι απότομη χειροτέρευση της συμπάγειας των τριγώνων του πλέγματος, περιορίζοντάς την στο 0,8 σε κάθε συρρίκνωση ακμής. Τέλος, η τιμή της  $\theta_{max}$  είναι σχετικά χαμηλή ώστε το περίβλημα να διατηρεί καλύτερα το σχήμα του αρχικού μοντέλου. Επιλέξαμε αυτές τις μάλλον «σφιχτές» τιμές των παραμέτρων με γνώμονα την παραγωγή προοδευτικών πλεγμάτων τα οποία να περικλείουν ερμητικά τα αρχικά μοντέλα. Τα αποτελέσματα αναλύονται παρακάτω, και γενικά είναι πολύ ικανοποιητικά. Ένα μειονέκτημα αυτής της επιλογής παραμέτρων είναι ότι η διαδικασία της απλοποίησης τελειώνει σχετικά νωρίς, στις 20–70 τελικές όψεις ανάλογα με το μοντέλο, λόγω των αντίστοιχων περιορισμών· βέβαια, όπως θα δούμε στην παράγραφο 3.4.3.1, για την εφαρμογή εύρεσης τομής που αναπτύσσουμε, προοδευτικά περιβλήματα με τόσο μικρό αριθμό όψεων δεν είναι χρήσιμα. Δοκιμάσαμε επίσης και πιο «χαλαρές» τιμές των παραμέτρων, αλλά οι διαφορές ήταν σχετικά μικρές: μοντέλα με μεγάλη λεπτομέρεια, όπως ο δεινόσαυρος, έδωσαν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα, ενώ αντίθετα, ομαλότερα μοντέλα όπως η Υγεία έδωσαν κάπως χειρότερα αποτελέσματα.

Κατόπιν τούτων, το πιο ενδιαφέρον σημείο στο αλγόριθμό μας είναι οι δύο διαφορετικοί τρόποι απονομής της προτεραιότητας στις υποψήφιες συρρικνώσεις ακμών, και σε αυτό επικεντρώνεται η παρουσίασή μας. Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο 3.3.1, αναμένουμε ο πρώτος τρόπος απονομής προτεραιότητας να δίνει καλύτερα αποτελέσματα αλλά σε μεγαλύτερο χρόνο σε σχέση με τον δεύτερο.



Οι **χρόνοι κατασκευής** περιβλημάτων 2.000 όψεων για τα έξι μοντέλα που εξετάσαμε αναφέρονται στον ΠΙΝΑΚΑ 3.1. Οι χρόνοι αυτοί περιλαμβάνουν συνολικά τη διαδικασία απλοποίησης, ξεκινώντας από το αρχικό μοντέλο και εφαρμόζοντάς την μέχρι το παραγόμενο περίβλημα να έχει 2.000 όψεις. Από τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται καθαρά ότι ο δεύτερος τρόπος απονομής προτεραιότητας μειώνει το χρόνο κατασκευής του προοδευτικού περιβλήματος τουλάχιστον στο ένα έκτο του χρόνου που απαιτείται με τον πρώτο τρόπο.

— ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 —

*Χρόνοι (σε δευτερόλεπτα) για να κατασκευαστούν προοδευτικά περιβλήματα 2.000 όψεων με τους δύο τρόπους απονομής προτεραιότητας.*

Μοντέλο	#όψεων	1 <sup>ος</sup> τρόπος	2 <sup>ος</sup> τρόπος
Εξάρτημα	20.088	54	8
Κατσαβίδι	54.300	161	26
Δεινόσαυρος	84.288	245	37
Άλογο	96.966	298	45
Υγεία	134.342	478	69
Οστό	274.120	1.006	158

Για να αξιολογήσουμε την **ποιότητα** των παραγόμενων περιβλημάτων επιλέξαμε να μετρήσουμε τον όγκο του «κενού» χώρου μεταξύ του αρχικού μοντέλου και του περιβλήματός του σε διάφορες αναλύσεις. Αυτό το μέτρο αξιολόγησης πιστεύουμε ότι είναι κατάλληλο για την εφαρμογή που εξετάζουμε, καθώς εκφράζει το πόσο ερμητικά περικλείεται το μοντέλο από το περίβλημα που κατασκευάστηκε. Αντίθετα, τα μέτρα που συνήθως χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των αλγορίθμων απλοποίησης και μετρούν την απόσταση μεταξύ του απλοποιημένου και του αρχικού μοντέλου (παράγραφος 2.2.1.2), θα ήταν ενδεχομένως παραπλανητικά, δεδομένων των αυστηρών περιορισμών που τίθενται για τη θέση της κορυφής που προκύπτει από κάθε συρρίκνωση ακμής.

Ο όγκος του κενού χώρου υπολογίστηκε αφαιρώντας τον όγκο του αρχικού μοντέλου από τον όγκο του περιβλήματος. Ο όγκος του εκάστοτε τριγωνικού πλέγματος υπολογίστηκε από τον τύπο

$$\text{Vol} = \frac{1}{6} \sum_i \Pi_{\Delta_i}(0, 0, 0)$$

για όλα τα τρίγωνα  $\Delta_i$  του πλέγματος [Gui97] χρησιμοποιώντας διπλή ακρίβεια υπολογισμών.

Στον ΠΙΝΑΚΑ 3.2 παρουσιάζουμε τον όγκο του κενού χώρου, ως ποσοστό του όγκου του αρχικού μοντέλου, για περιβλήματα 2.000 και 200 όψεων των μοντέλων που εξετάσαμε, χρησιμοποιώντας τους δύο εναλλακτικούς τρόπους απονομής προτεραιοτήτων στις συρρικνώσεις ακμών.

— ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 —

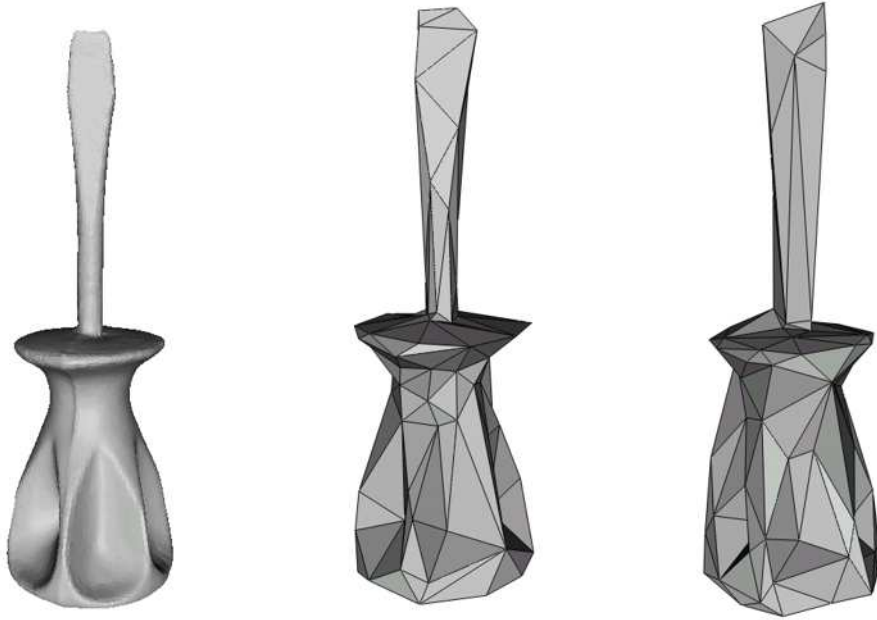
Όγκος κενού χώρου, ως ποσοστό του αρχικού όγκου του μοντέλου, για περιβλήματα 2.000 και 200 όψεων με τους δύο τρόπους απονομής προτεραιότητας.

Μοντέλο	περίβλ.	1 <sup>ος</sup> τρόπος	2 <sup>ος</sup> τρόπος
Εξάρτημα	2.000	2,87 %	5,72 %
	200	28,90 %	62,91 %
Κατσαβίδι	2.000	2,21 %	3,53 %
	200	20,70 %	38,99 %
Δεινόσαυρος	2.000	15,08 %	21,70 %
	200	164,84 %	165,85 %
Άλογο	2.000	4,11 %	6,86 %
	200	65,06 %	65,60 %
Υγεία	2.000	2,04 %	3,02 %
	200	12,06 %	17,14 %
Οστό	2.000	3,46 %	5,32 %
	200	19,60 %	31,16 %

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο δεύτερος τρόπος παράγει γενικά υποδεέστερα περιβλήματα από τον πρώτο, όπως αναμέναμε, όμως στις περισσότερες περιπτώσεις η χειροτέρευση είναι σχετικά μικρή (βλ. και τα ΣΧΗΜΑΤΑ 3.2 και 3.3). Δεδομένης της πολύ σημαντικής επιτάχυνσης στον αλγόριθμο που επιφέρει η χρήση του δεύτερου τρόπου απονομής προτεραιότητας, φαίνεται ότι η χρήση του μπορεί να προτιμηθεί για την εφαρμογή που εξετάζουμε· αυτό θα επιβεβαιωθεί και από τις δοκιμές ελέγχου τομής με τα προοδευτικά περιβλήματα που θα παρουσιάσουμε παρακάτω στην παράγραφο 3.4.3. Σημειώνουμε, βέβαια, ότι σε αρκετές περιπτώσεις ο χρόνος κατασκευής του προοδευτικού περιβλήματος δεν

αποτελεί σημαντικό παράγοντα, καθώς αυτή πραγματοποιείται μία φορά, μέχρι την ελάχιστη δυνατή ανάλυση που μπορεί να επιτευχθεί, και κατόπιν το προοδευτικό περίβλημα αποθηκεύεται προς χρήση· αντιθέτως, η σημασία του χρόνου κατασκευής γίνεται μεγαλύτερη όσο αυξάνει το μέγεθος του επεξεργαζόμενου πλέγματος ή το πλήθος των μοντέλων στα οποία πρέπει να εφαρμοστεί.

Τα αποτελέσματα δηλώνουν επίσης ότι σε κάθε περίπτωση για περιβλήματα που αποτελούνται (τουλάχιστον) από 2.000 όψεις ο κενός χώρος είναι πολύ μικρός. Αυτό επιβεβαιώνει την οπτική εντύπωση των Σχημάτων 3.2-3.7, όπου φαίνεται ότι αυτά τα περιβλήματα περικλείουν πολύ ερμητικά τα αρχικά μοντέλα. Αυτή η ιδιότητα των κατασκευαζόμενων περιβλημάτων είναι πολύ σημαντική για την αξιοποίησή τους σε εφαρμογές εύρεσης τομής, όπως έχουμε τονίσει, και θα συμβάλει στις καλές επιδόσεις που παρουσιάζει ο σχετικός αλγόριθμος που αναπτύσσουμε στην επόμενη παράγραφο. Σημειώνουμε, τέλος, ότι χάρη στην καλή εφαρμογή τους στο αρχικό πλέγμα, θα ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα ίδια τα περιβλήματα, μέχρι περίπου αυτή την ανάλυση, απευθείας για την απεικόνιση των αρχικών μοντέλων, σε περιπτώσεις όπου η απαιτούμενη λεπτομέρεια είναι σχετικά μικρή· κάτι τέτοιο, σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο εύρεσης τομών που παρουσιάζουμε παρακάτω καθώς και με άλλες εφαρμογές τους όπως αυτή των [SGG<sup>+</sup>00], κάνει τα προοδευτικά περιβλήματα ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την απεικόνιση και την επεξεργασία κλειστών τριγωνικών μοντέλων.



— ΣΧΗΜΑ 3.2 —

Κατσαβίδι: Αρχικό μοντέλο (54.300 όψεις), περιβλήματά του των 200 όψεων που έχουν παραχθεί με τον πρώτο και τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας, αντίστοιχα.



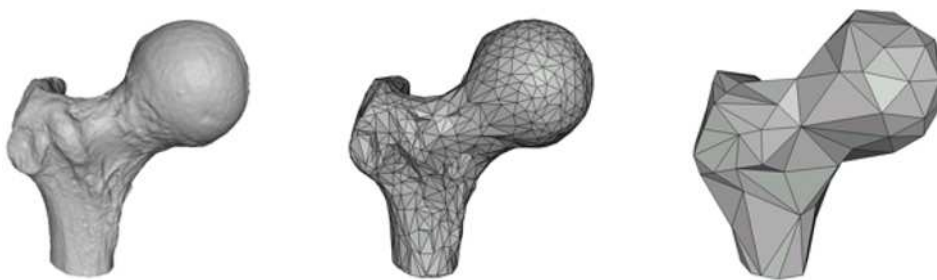
— ΣΧΗΜΑ 3.3 —

Υγεία: Αρχικό μοντέλο (134.342 όψεις), περιβλήματά του των 2.000 όψεων που έχουν παραχθεί με τον πρώτο και τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας, αντίστοιχα.



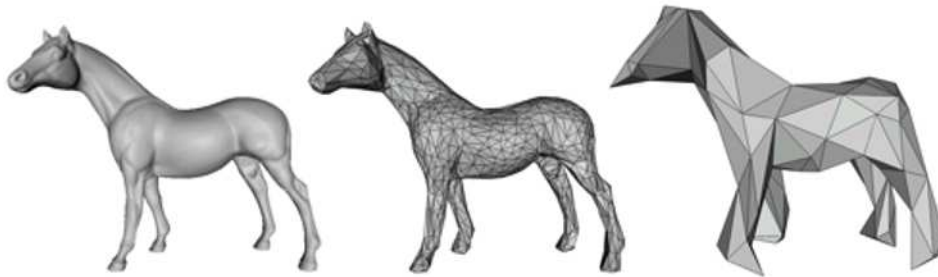
— ΣΧΗΜΑ 3.4 —

*Εξάρτημα: Αρχικό μοντέλο (20.088 όψεις), περιβλήματά του των 2.000 και 200 όψεων που έχουν παραχθεί με τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας.*



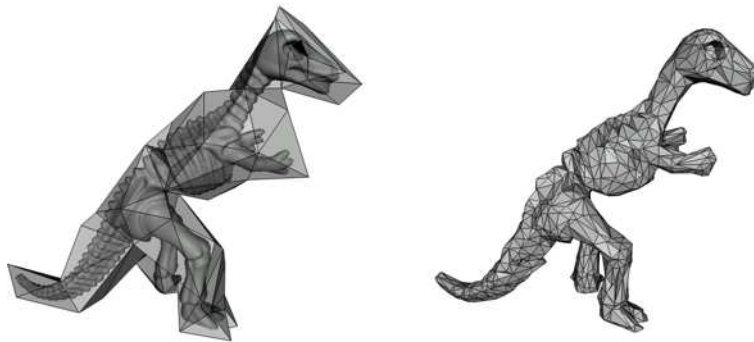
— ΣΧΗΜΑ 3.5 —

*Οστό: Αρχικό μοντέλο (274.120 όψεις), περιβλήματά του των 2.000 και 200 όψεων που έχουν παραχθεί με τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας.*



— ΣΧΗΜΑ 3.6 —

Άλογο: Αρχικό μοντέλο (96.966 όψεις), περιβλήματά του των 2.000 και 200 όψεων που έχουν παραχθεί με τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας.



— ΣΧΗΜΑ 3.7 —

Δεινόσαυρος: Αρχικό μοντέλο (84.288 όψεις) μέσα στο περίβλημά του των 200 όψεων, περίβλημά του των 2.000 όψεων έχει χρησιμοποιηθεί ο δεύτερος τρόπος απονομής προτεραιότητας.

### 3.4 Έλεγχος τομής με χρήση προοδευτικών περιβλημάτων

Το βασικό μας κίνητρο για την κατασκευή των προοδευτικών περιβλημάτων είναι η αξιοποίησή τους για την επιτάχυνση των ελέγχων τομής τριγωνικών πλεγμάτων με ευθείες. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο που αναπτύξαμε για το πρόβλημα αυτό.

#### 3.4.1 Αλγόριθμος ελέγχου τομής ευθείας-τριγωνικού πλέγματος με χρήση προοδευτικού περιβλήματος

Ο αλγόριθμός μας ξεκινά ελέγχοντας για ύπαρξη τομής μεταξύ της ευθείας και του βασικού περιβλήματος  $M^0$ . Αυτός είναι ο οικονομικότερος υπολογιστικά έλεγχος, καθώς το  $M^0$  είναι το περίβλημα με τα λιγότερα τρίγωνα. Εφόσον διαπιστώσει την ύπαρξη τομής με αυτό, σταδιακά εκλεπτύνει τοπικά το προοδευτικό περίβλημα σε περιοχές όπου σημειώνεται τομή, και ελέγχει τα τρίγωνα που μεταβάλλονται κατά την εκλεπτύνση. Με τον τρόπο αυτό πλησιάζει προς το αρχικό μοντέλο, περιορίζοντας τους ελέγχους τομής ολοένα και πιο κοντά στα πιθανά σημεία τομής. Ο αλγόριθμος συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο μέχρι να φτάσει στο αρχικό πλέγμα  $M^n$  ή να μην υπάρχει πλέον τομή με τα εξεταζόμενα τρίγωνα. Αναλυτικά η διαδικασία παρουσιάζεται στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 3.1.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου παρουσιάζεται στο ΣΧΗΜΑ 3.8 για το μοντέλο του οστού. Ξεκινώντας από ένα βασικό περίβλημα 2.000 όψεων, με διαδοχικές τοπικές εκλεπτύνσεις εντοπίζονται τα σημεία τομής του αρχικού μοντέλου με την ευθεία.

Σημειώνουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι δυνατό να αποτύχει να εντοπίσει κάποια σημεία τομής μεταξύ της ευθείας και του τριγωνικού πλέγματος. Αυτό μπορεί να συμβεί σε περιοχές όπου το μοντέλο παρουσιάζει «κυματισμούς» και η ευθεία περνάει εντελώς κάτω από το περίβλημα στην γειτονιά αυτών των σημείων τομής: στη περίπτωση αυτή, ενώ θα εντοπισθούν τα ακραία (πάνω στην ευθεία) σημεία τομής με το μοντέλο, είναι πιθανό τα ενδιάμεσα σημεία τομής να μην εντοπισθούν. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο ΣΧΗΜΑ 3.9. Σημειώνουμε πάντως ότι οι δοκιμές μας έδειξαν ότι στην πράξη αυτό συμβαίνει σπάνια: εξάλλου, οι περισσότερες πρακτικές εφαρμογές ενδιαφέρονται μόνο για

## — ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.1 —

*Αλγόριθμος ελέγχου τομής ευθείας-τριγωνικού πλέγματος με χρήση προοδευτικού περιβλήματος.*

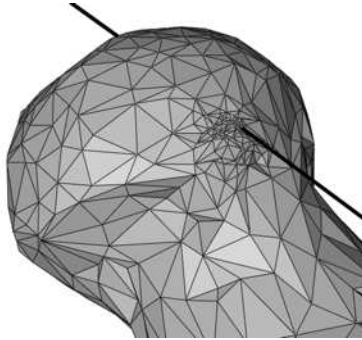
- 
1. Εισάγουμε όλες τις όψεις του βασικού περιβλήματος  $M^0$  σε μία λίστα υποψηφίων όψεων.
  2. Εφόσον υπάρχουν όψεις στη λίστα υποψηφίων όψεων,
    - (α) Αφαιρούμε από τη λίστα υποψηφίων όψεων την όψη που βρίσκεται στην κορυφή της.
    - (β) Ελέγχουμε αν η όψη αυτή τέμνεται με την ευθεία. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:
      - Δεν υπάρχει τομή. Στην περίπτωση αυτή αγνοούμε την όψη εντελώς.
      - Υπάρχει τομή και η όψη ανήκει σε κάποιο ενδιάμεσο επίπεδο λεπτομέρειας στο προοδευτικό περίβλημα· αυτό συμβαίνει όταν τουλάχιστον μία κορυφή της μπορεί να διασπαστεί. Στην περίπτωση αυτή διασπούμε κάθε κορυφή της όψης για την οποία αυτό είναι δυνατό (βλ. την παράγραφο 3.4.1.1 παρακάτω σχετικά), εκλεπτύνοντας έτσι τοπικά το περίβλημα στην περιοχή της όψης. Κατά τη διαδικασία της εκλέπτυνσης καταγράφουμε τις όψεις που επηρεάζονται· αυτές οι όψεις πρέπει να (επαν)ελεγχθούν για τομή με την ευθεία και για το λόγο αυτό εισάγονται στη λίστα υποψηφίων όψεων (εκτός και αν ήδη βρίσκονται στη λίστα).
      - Υπάρχει τομή και η όψη ανήκει στο αρχικό μοντέλο· αυτό συμβαίνει αν καμία κορυφή της δεν μπορεί να διασπαστεί. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία τέμνεται με το αρχικό μοντέλο και το σημείο τομής μπορεί να προσδιοριστεί και να καταγραφεί.
- 

τα ακραία σημεία τομής της ευθείας με το πλέγμα, τα οποία εντοπίζονται πάντα από τον αλγόριθμό μας.

### 3.4.1.1 Επιλεκτική εκλέπτυνση του προοδευτικού περιβλήματος

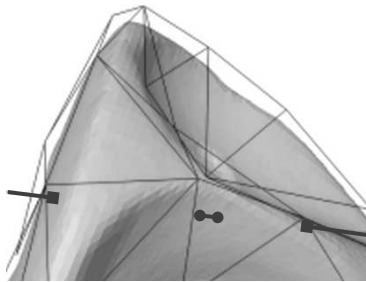
Ο περιορισμός των ελέγχων τομής της ευθείας με τρίγωνα του προοδευτικού περιβλήματος κοντά σε περιοχές των πιθανών σημείων τομής, στον αλγόριθμο που περιγράψαμε, είναι δυνατός χάρη στην επιλεκτική εκλέπτυνση του προοδευτικού περιβλήματος. Υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα αυτή ενός προοδευτικού πλέγματος αφορά την πραγματοποίηση διασπάσεων κορυφών σε αυθαίρετη σει-





— ΣΧΗΜΑ 3.8 —

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου εύρεσης τομής ευθείας-τριγωνικού πλέγματος. Το βασικό περίβλημα 2.000 όψων του μοντέλου οστού έχει εκλεπτυνθεί τοπικά γύρω από το σημείο τομής του με την ευθεία. Τα τρίγωνα γύρω από το σημείο τομής ανήκουν στο αρχικό μοντέλο και όσο απομακρυνόμαστε ανήκουν σε επίπεδα μικρότερης λεπτομέρειας του προοδευτικού περιβλήματος.



— ΣΧΗΜΑ 3.9 —

Ο αλγόριθμός μας δεν εντοπίζει τα ενδιαμέσα σημεία τομής της ευθείας με το μοντέλο (σημειώνονται με κύκλο). Η ευθεία διέρχεται εντελώς κάτω από το περίβλημα σε αυτή την περιοχή. Αντίθετα, τα ακραία σημεία τομής (σημειώνονται με τετράγωνο) εντοπίζονται κανονικά.

ρά, ανεξάρτητη από τη σειρά τους στην αναπαράστασή του. Όπως έχουμε αναφέρει και στην παράγραφο 2.2.4.6, προκειμένου να διατηρείται η τοπολογική εγκυρότητα του πλέγματος έχουν αναπτυχθεί διάφοροι τρόποι για την υλοποίηση της επιλεκτικής εκλέπτυνσης.

Για την ασφαλή χρήση του προοδευτικού περιβλήματος στον αλγόριθμο εύρεσης τομής που παρουσιάσαμε, πρέπει τα ενδιάμεσα περιβλήματα που παράγονται από την επιλεκτική, τοπική εκλέπτυνση του βασικού περιβλήματος να συνεχίσουν να περικλείουν το αρχικό μοντέλο. Ο πιο ενδεδειγμένος τρόπος για να εξασφαλιστεί αυτό είναι να απαιτήσουμε το άστρο κάθε κορυφής που διασπάται να είναι όπως ακριβώς θα ήταν αν οι προηγούμενες διασπάσεις κορυφών είχαν εφαρμοστεί με τη σειρά στο βασικό περίβλημα: αυτό είναι στην ουσία το σχήμα επιλεκτικής εκλέπτυνσης του [XV96], το οποίο επιβάλλει την πλήρη ανασύσταση του άστρου της κορυφής πριν αυτή διασπαστεί (βλ. την παράγραφο 2.2.4.6). Για τον ίδιο λόγο γίνεται εμφανής η αδυναμία χρήσης σχημάτων επιλεκτικής εκλέπτυνσης τα οποία, αν και διασφαλίζουν την τοπολογική εγκυρότητα του πλέγματος, δεν αποκαθιστούν πλήρως το άστρο της ακμής.

### 3.4.2 Διαδοχικοί έλεγχοι τομής

Οι έλεγχοι τομής με ένα τρισδιάστατο μοντέλο συνήθως δεν γίνονται μεμονωμένοι αλλά επαναλαμβάνονται για πολλά γεωμετρικά στοιχεία διαδοχικά. Για παράδειγμα ελέγχονται όλες οι ευθείες που ξεκινούν από τη φωτεινή πηγή (φωτεινές ακτίνες) σε μία εφαρμογή φωτοσκίασης ή όλα τα τρίγωνα ενός άλλου μοντέλου σε μία εφαρμογή ελέγχου σύγκρουσης. Όταν χρησιμοποιείται μία βοηθητική δομή όπως το προοδευτικό περίβλημα για την επιτάχυνση κάθε επιμέρους ελέγχου τομής, υπάρχουν δύο τρόποι αντιμετώπισης των απαιτούμενων διαδοχικών ελέγχων:

- Μετά από κάθε έλεγχο να επανερχόμαστε στο βασικό περίβλημα με τον ελάχιστο αριθμό τριγώνων, από το οποίο να ξεκινούμε τον επόμενο έλεγχο. Αυτό μπορεί να είναι εξαιρετικά αποδοτικό αν είναι εύκολη η πρόσβαση στο βασικό περίβλημα, οπότε μετά από κάθε έλεγχο απλώς παραβλέπουμε το τοπικά εκλεπτυσμένο περίβλημα που έχει προκύψει και αναχτούμε απευθείας το βασικό περίβλημα. Στην περίπτωση που η πρόσβαση σε αυτό δεν είναι άμεση, για παράδειγμα επειδή είναι αποθηκευμένο σε αρ-

γή εξωτερική μνήμη, για να επανέλθουμε στο βασικό περίβλημα πρέπει να συγκεντρώσουμε, τυπικά σε μία στοίβα, τις διασπάσεις κορυφών που πραγματοποιήθηκαν, και να εφαρμόσουμε στο περίβλημα που προέκυψε τις αντίστροφές τους συρρικνώσεις ακμών.

- Μετά από κάθε έλεγχο να χρησιμοποιούμε το τοπικά εκλεπτυσμένο περίβλημα και να πραγματοποιούμε *αυξητικές ενημερώσεις* του, δηλαδή εκτός από τις τοπικές εκλεπτύνσεις που απαιτούνται από τον αλγόριθμο, να πραγματοποιούμε επίσης τοπικές εκτραχύνσεις στα σημεία που βρίσκονται μακριά από τις περιοχές τομής. Η τακτική αυτή είναι ελκυστική όταν υπάρχει χωρική συνάφεια μεταξύ των διαδοχικών στοιχείων που ελέγχονται για τομή με το πλέγμα, κάτι που είναι αρκετά συνηθισμένο: για παράδειγμα οι φωτεινές ακτίνες αποστέλλονται προς το μοντέλο κατά γραμμές και στήλες, ή τα τρίγωνα ενός άλλου μοντέλου διατρέχονται ακολουθώντας τα γειτονικά αυτών που έχουν ήδη εξεταστεί.

Την απόδοση αυτών των δύο εναλλακτικών τρόπων αντιμετώπισης διαδοχικών ελέγχων τομής εξετάσουμε στην παράγραφο **3.4.3.3**.

### 3.4.3 Αποτελέσματα

Για να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα των προοδευτικών περιβλημάτων στην επιτάχυνση ελέγχων τομής ενός τριγωνικού μοντέλου, συγκρίναμε κατ' αρχάς τα περιβλήματα που προκύπτουν από τους δύο τρόπους απονομής προτεραιότητας, και επίσης μελετήσαμε την επίδραση του βασικού περιβλήματος στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Για να έχουμε ένα μέτρο της απόδοσής τους σε σχέση με καθιερωμένες δομές περιβαλλόντων όγκων, τα συγκρίναμε με αυτή των *k-DOPs*. Τέλος, διερευνήσαμε τους δύο εναλλακτικούς τρόπους που αναπτύξαμε για την πραγματοποίηση διαδοχικών ελέγχων τομής.

Οι δοκιμές μας πραγματοποιήθηκαν σε προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Pentium III στα 800MHz με 384MB μνήμης RAM.

#### 3.4.3.1 Έλεγχοι τομής, βέλτιστο βασικό περίβλημα

Για τις δοκιμές μας χρησιμοποιήσαμε τα μοντέλα των οποίων κατασκευάσαμε προοδευτικά περιβλήματα στην ενότητα **3.3.3**. Σχηματίσαμε 10.000 τυχαία

ευθύγραμμα τμήματα με άκρα σε ένα παραλληλεπίπεδο διπλάσιο σε μέγεθος από το ελάχιστο παραλληλεπίπεδο (minmax box) που περιέκλειε κάθε μοντέλο, και ελέγξαμε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα για τομή με κάθε μοντέλο.

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 παρουσιάζει αναλυτικά αποτελέσματα για το μοντέλο του αλόγου, με χρήση διαφορετικών βασικών περιβλημάτων που κατασκευάστηκαν με τους δύο τρόπους απονομής προτεραιότητας στις συρρικνώσεις ακμών. Τα αποτελέσματα που λάβαμε για τα υπόλοιπα μοντέλα είναι εντελώς ανάλογα.

— ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 —

*Επιδόσεις ελέγχων τομής για προοδευτικά περιβλήματα του μοντέλου αλόγου. Οι χρόνοι είναι συνολικοί, σε δευτερόλεπτα, για 10.000 τυχαία ευθύγραμμα τμήματα. Οι αριθμοί των ελέγχων τομής ευθείας-τριγώνου και των διασπάσεων κορυφών που πραγματοποιήθηκαν είναι κατά μέσο όρο για τα 10.000 ευθύγραμμα τμήματα που εξετάστηκαν. 1.119 ευθύγραμμα τμήματα έτεμναν το μοντέλο.*

Βασικό περίβλ.	χρόνος	#ελέγχων	#διασπάσεων
<b>1<sup>ος</sup> τρόπος</b>			
200	22,11	759	226
500	21,15	812	203
1.000	20,77	939	179
2.000	21,41	1.209	145
3.000	23,93	1.522	124
4.000	26,07	1.841	108
5.000	28,79	2.176	96
10.000	44,12	3.904	61
<b>2<sup>ος</sup> τρόπος</b>			
200	23,11	798	238
500	22,38	868	217
1.000	21,79	986	192
2.000	22,59	1.254	155
3.000	24,44	1.550	131
4.000	26,98	1.871	114
5.000	29,46	2.200	100
10.000	44,29	3.907	63
<b>πλήρες μοντέλο</b>			
(96.966)	362,63	35.751	

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι γενικά η χρήση προοδευτικού περιβλήματος του μοντέλου επιταχύνει δραματικά τη διαδικασία εύρεσης τομής του με τα ευθύγραμμα τμήματα. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα αναφέρεται ο χρόνος που απαιτήθηκε για τον έλεγχο του αρχικού μοντέλου, ο οποίος είναι πολλαπλάσιος των χρόνων που σημειώθηκαν με τη χρήση προοδευτικών περιβλημάτων.

Διαπιστώνουμε επίσης ότι τα προοδευτικά περιβλήματα που κατασκευάζονται με τους δύο τρόπους απονομής προτεραιότητας διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους στις επιδόσεις: αυτά που κατασκευάζονται με τον δεύτερο τρόπο είναι ελαφρώς λιγότερο αποδοτικά σε σχέση με αυτά που κατασκευάζονται με τον πρώτο, κάτι που είναι όμως αναμενόμενο δεδομένου ότι περικλείουν το μοντέλο λιγότερο ερμητικά, όπως είδαμε στην παράγραφο 3.3.3. Πιστεύουμε όμως ότι ο σημαντικά λιγότερος χρόνος που χρειάζεται για τη δημιουργία τους, σε σχέση με τη συνολικά μικρή διαφορά των επιδόσεών τους, όσον αφορά τόσο τον κενό όγκο όσο και την επιτάχυνση των ελέγχων τομής, κάνει αυτά τα προοδευτικά περιβλήματα πιο ελκυστική λύση σε σχέση με εκείνα που δημιουργούνται με τον πρώτο τρόπο.

Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο του πίνακα είναι οι επιδόσεις των προοδευτικών περιβλημάτων σε σχέση με το πλήθος όψεων του βασικού περιβλήματος. Όπως φαίνεται, περιβλήματα με 1.000 όψεις αποδίδουν καλύτερα από όλα τα υπόλοιπα σε αυτό το μοντέλο, ενώ τα βασικά περιβλήματα με πολύ λίγες ή πάρα πολλές όψεις αποδίδουν χειρότερα. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί αν αναλογισθούμε ότι η απόδοση του αλγορίθμου επηρεάζεται από τους εξής τρεις παράγοντες:

1. Το πόσο ερμητικά περικλείεται το μοντέλο από το βασικό περίβλημα. Βασικά περιβλήματα με καλύτερη εφαρμογή οδηγούν στην άμεση απόρριψη περισσότερων ευθειών που δεν τέμνονται με το μοντέλο· αντίθετα, βασικά περιβλήματα με πιο χαλαρή εφαρμογή στο μοντέλο τέμνονται από ευθείες που διέρχονται κοντά από αυτό, κάτι που οδηγεί σε επιλεκτική εκλέπτυσή τους για περαιτέρω ελέγχους και επιφέρει το ανάλογο κόστος.
2. Το πλήθος των ελέγχων τομής ευθείας-τριγώνου που πρέπει να πραγματοποιηθούν, καθώς καθένας από αυτούς έχει ένα δεδομένο υπολογιστικό κόστος.
3. Το πλήθος των διασπάσεων κορυφών που πρέπει να πραγματοποιηθούν,

καθώς η επιλεκτική εκλέπτυνση του περιβλήματος έχει σημαντική υπολογιστική πολυπλοκότητα και επιπλέον επιβαρύνει τον αλγόριθμο με νέους ελέγχους τομής της ευθείας με τα τρίγωνα που επηρεάζονται.

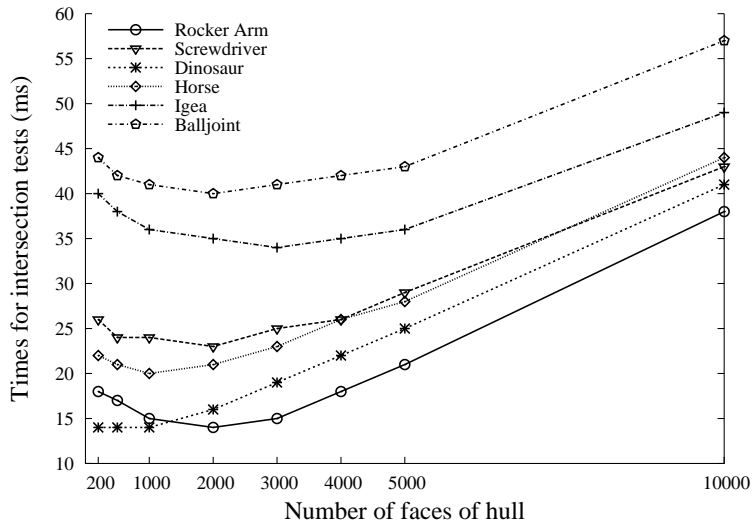
Συνολικά, όσο αυξάνεται το πλήθος των όψεων του βασικού περιβλήματος, τόσο βελτιώνεται η εφαρμογή του στο αρχικό μοντέλο και μειώνονται τα βήματα εκλέπτυνσης που χρειάζονται για να φτάσουμε από το βασικό περίβλημα στο αρχικό μοντέλο· συγχρόνως όμως αυξάνονται οι απαιτούμενοι έλεγχοι τομής, καθώς πρέπει να ελεγχθούν τουλάχιστον όλα τα τρίγωνα του βασικού περιβλήματος. Συνεπώς, την καλύτερη απόδοση έχουν βασικά περιβλήματα μέτριου μεγέθους, αντιπροσωπεύοντας τον καλύτερο συμβιβασμό μεταξύ των παραμέτρων που αναφέραμε προηγουμένως.

Η συμπεριφορά αυτή επιβεβαιώνεται και από τις δοκιμές με τα υπόλοιπα μοντέλα. Αυτές συνοψίζονται στο ΣΧΗΜΑ 3.10, όπου απεικονίζονται οι χρόνοι εύρεσης των τομών σε συνάρτηση με το πλήθος όψεων του βασικού περιβλήματος. Σε όλες τις περιπτώσεις, βασικά περιβλήματα μέτριου μεγέθους, με 500 ως 3.000 όψεις, απέδωσαν καλύτερα. Φυσικά πρέπει να τονίσουμε ότι οι απόλυτες τιμές μεγέθους των βέλτιστων βασικών περιβλημάτων εξαρτώνται άμεσα από την υλοποίηση των διαφόρων συστατικών μερών του αλγορίθμου και τη σχετική αποδοτικότητα των ελέγχων τομής και των ενημερώσεων του πλέγματος κατά την επιλεκτική εκλέπτυνσή του.

### 3.4.3.2 Σύγκριση με άλλες ιεραρχικές δομές περιβαλλόντων όγκων

Η σύγκριση μεταξύ τεχνικών που επιταχύνουν ελέγχους τομής μεταξύ τρισδιάστατων αντικειμένων είναι εξαιρετικά δύσκολη, καθώς το είδος των ελέγχων που συγκρίνονται μπορεί να επηρεάσει σημαντικά το αποτέλεσμα: κάθε τεχνική αντιμετωπίζει καλύτερα ένα συγκεκριμένο είδος ελέγχων τομής και μπορεί να μην αποδίδει καλά σε άλλους, έστω και παρόμοιους.

Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης της απόδοσης της μεθόδου μας σε σχέση με άλλες καθιερωμένες μεθόδους ελέγχου τομής που επίσης χρησιμοποιούν ιεραρχικούς περιβάλλοντες όγκους των αντικειμένων, χρησιμοποιήσαμε για την ίδια δοκιμασία που περιγράψαμε προηγουμένως τα *k*-DOPs, τα οποία, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι αναγνωρισμένα ως μία εξαιρετικά αποδοτική δομή περιβαλλόντων όγκων.



— ΣΧΗΜΑ 3.10 —

Χρόνοι ελέγχου τομών για όλα τα μοντέλα συναρτήσει του πλήθους όψεων του βασικού περιβλήματος. Τα περιβλήματα έχουν δημιουργηθεί με τον δεύτερο τρόπο απονομής προτεραιότητας. Οι χρόνοι είναι μέσοι όροι για τα 10.000 ευθύγραμμα τμήματα.

Σημειώνουμε εδώ ότι τα  $k$ -DOPs αντιμετωπίζουν κυρίως ελέγχους τομής μεταξύ δύο τριγωνικών πλεγμάτων σε εφαρμογές ελέγχου συγκρούσεων. Για να είναι δικαιότερη η σύγκριση στο πλαίσιο των δοκιμών που πραγματοποιήσαμε, αντικαταστήσαμε τον τελικό έλεγχο τομής μεταξύ δύο τριγώνων (που είναι και το μοναδικό σημείο στο οποίο δεν συγκρίνονται τα  $k$ -DOPs των μοντέλων αλλά τα τρίγωνα που τα αποτελούν) με τον ίδιο έλεγχο τομής ευθείας-τριγώνου [MT97] που χρησιμοποιήσαμε και στις δοκιμές του δικού μας αλγορίθμου· η αλλαγή αυτή επέφερε βελτίωση των επιδόσεων κατά 30% με 40% σε σχέση με τον αρχικό κώδικα των  $k$ -DOPs. Επίσης δοκιμάσαμε όλη την οικογένεια των  $k$ -DOPs για  $k = 6, 14, 18, 26$ .

Τα αποτελέσματα που λάβαμε παρουσιάζονται στον ΠΙΝΑΚΑ 3.4. Όπως φαίνεται, μεταξύ των  $k$ -DOPs ταχύτερα ήταν τα 26-DOPs· σημειώνουμε όμως ότι αυτά απαιτούσαν σημαντικά μεγαλύτερο χρόνο προεπεξεργασίας σε σχέση με τα υπόλοιπα. Σε σύγκριση με τα προοδευτικά περιβλήματα, παρατηρούμε ότι για τη συγκεκριμένη δοκιμασία η καλύτερη επίδοση των προοδευτικών περιβλημάτων

## — ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4 —

Χρόνοι εύρεσης τομών (σε δευτερόλεπτα) για  $k$ -DOPs και για προοδευτικά περιβλήματα (Π.Π.). Για τα προοδευτικά περιβλήματα αναφέρεται ο καλύτερος χρόνος που λάβαμε μεταξύ των βασικών περιβλημάτων που δοκιμάσαμε.

Μοντέλο	6-DOPs	14-DOPs	18-DOPs	26-DOPs	Π.Π.
Εξάρτημα	45	24	21	18	14
Κατσαβίδι	120	69	50	45	24
Δεινόσαυρος	190	73	68	49	14
Άλογο	216	79	76	52	21
Υγεία	298	107	68	45	35
Οστό	707	258	204	137	41

(που είναι αυτή που αναφέρεται στον πίνακα) υπερτερεί των  $k$ -DOPs σε όλες τις περιπτώσεις.

### 3.4.3.3 Διαδοχικοί έλεγχοι τομής

Προσπαθήσαμε, τέλος, να αξιολογήσουμε τις δύο εναλλακτικές λύσεις που αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.4.2 για την πραγματοποίηση διαδοχικών ελέγχων τομής. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήσαμε δοκιμές με διαδοχικούς ελέγχους τομής του πλέγματος με παράλληλες ευθείες διατεταγμένες σε γραμμές και στήλες.

Για τις δοκιμές αυτές θα περιμέναμε να επικρατήσει η δεύτερη λύση, που κάνει χρήση αυξητικών ενημερώσεων του περιβλήματος. Παρότι όμως για την πρώτη λύση λάβαμε υπ' όψιν μας τη χειρότερη δυνατή περίπτωση, όπου πρέπει να αντιστραφούν οι διασπάσεις κορυφών που πραγματοποιήθηκαν σε κάθε έλεγχο τομής, στην υλοποίησή μας η δεύτερη λύση έδωσε υποδεέστερα αποτελέσματα σε σχέση με την πρώτη. Αυτό πρέπει να αποδοθεί στο γεγονός ότι η επιλεκτική εκτρέχυνση του περιβλήματος είναι αρκετά πολύπλοκη, καθώς απαιτεί αφενός αναδρομικές συρρικνώσεις ακμών και αφετέρου ελέγχους ότι οι συρρικνούμενες ακμές δεν είναι στη γειτονιά των σημείων τομής. Αντίθετα, για κάθε έλεγχο τομής εκλεπτύνονται μικρές περιοχές του περιβλήματος και πραγματοποιούνται σχετικά λίγες διασπάσεις κορυφών, οι οποίες είναι μάλλον εύκολο να αντιστραφούν ώστε να επιστρέψουμε στο βασικό περίβλημα.



Πιστεύουμε πάντως ότι αυτή η κακή επίδοση της αυξητικής ενημέρωσης του προοδευτικού περιβλήματος παρουσιάζεται ειδικά στην εφαρμογή που εξετάζουμε για τους λόγους που αναλύσαμε προηγουμένως. Αντίθετα, η διαδικασία αυτή έχει αποδεδειγμένη αξία σε εφαρμογές όπως η αλληλεπιδραστική απεικόνιση προοδευτικών πλεγμάτων [Hop97] όπου αξιοποιείται χάρη στη συνάφεια της απεικόνισης μεταξύ διαδοχικών καρέ· όμως σε εκείνη την περίπτωση οι περιοχές του πλέγματος που έχουν εκτραχυνθεί είναι εκτεταμένες ενώ αυτές που πρέπει να εκλεπτυνθούν σε κάθε βήμα (καρέ) είναι σχετικά μικρές, και επομένως συμφέρει να ενημερωθεί το ήδη υπάρχον πλέγμα παρά να επιστρέψουμε στο βασικό.

Σημειώνουμε ότι μία ενδιαμέση λύση χρησιμοποιείται στο [Gué01]. Στην εργασία αυτή αποφεύγεται η επιλεκτική εκτράχυνση, όπως στην πρώτη λύση που περιγράψαμε, αλλά το κατά τόπους εκλεπτυσμένο περίβλημα χρησιμοποιείται για μερικούς διαδοχικούς ελέγχους τομής πριν γίνει επιστροφή στο βασικό περίβλημα. Με τον τρόπο αυτό γίνεται εκμετάλλευση των ήδη εκλεπτυσμένων περιοχών του περιβλήματος για λίγους διαδοχικούς ελέγχους, στους οποίους αναμένεται χωρική συνάφεια, αλλά επαναφέρεται το βασικό περίβλημα όταν ο αριθμός των όψεων του τρέχοντος περιβλήματος αυξηθεί αρκετά και θα επιδρούσε αρνητικά στην απόδοση του αλγορίθμου.

### 3.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο κατασκευής του προοδευτικού περιβλήματος ενός κλειστού τριγωνικού πλέγματος. Το προοδευτικό περίβλημα κατασκευάζεται με διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος, οι οποίες όμως περιορίζονται ώστε η κορυφή που προκύπτει κάθε φορά να βρίσκεται στο εξωτερικό του. Για την επιτάχυνση της διαδικασίας προτείναμε ένα νέο τρόπο εκτίμησης της προτεραιότητας κάθε συρρίκνωσης ακμής, ο οποίος προσφέρει σημαντική βελτίωση των επιδόσεων του αλγορίθμου χωρίς σημαντική επίπτωση στην ποιότητα του παραγόμενου περιβλήματος.

Επίσης αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο που αξιοποιεί το προοδευτικό περίβλημα ενός τριγωνικού πλέγματος για την επιτάχυνση ελέγχων τομής με αυτό. Ο αλγόριθμος εκλεπτύνει επιλεκτικά το βασικό περίβλημα σε περιοχές όπου υπάρχει τομή, μέχρι να φτάσει στο αρχικό πλέγμα, εντοπίζοντας έτσι το σημείο

τομής. Οι επιδόσεις του αλγορίθμου είναι καλύτερες σε σχέση με αυτές καθιερωμένων αλγορίθμων εύρεσης τομής που επίσης χρησιμοποιούν ιεραρχικούς περιβάλλοντες όγκους του πλέγματος.

Μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας στο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου αφορούν τόσο τον αλγόριθμο κατασκευής των προοδευτικών περιβλημάτων όσο και τον αλγόριθμο εύρεσης τομής.

Ως προς την κατασκευή των προοδευτικών περιβλημάτων, η επιτυχία του νέου τρόπου εκτίμησης της προτεραιότητας που προτείναμε δικαιολογεί την έρευνα για ακόμα πιο οικονομικούς τρόπους εκτίμησής της. Ακόμα και η διαδικασία βελτιστοποίησης για την εύρεση της νέας κορυφής θα μπορούσε να αντικατασταθεί με έναν απλούστερο υπολογισμό.

Ως προς τον αλγόριθμο εύρεσης τομής που αξιοποιεί τα προοδευτικά περιβλήματα, αυτός είναι αυτοτελής και αντιμετωπίζει με επιτυχία το αντικείμενό του. Αξίζει πάντως να διερευνηθεί το ζήτημα της εύρεσης των εσωτερικών σημείων τομής για τις περιπτώσεις στις οποίες αυτά δεν εντοπίζονται από την υπάρχουσα μορφή του.

Τέλος, ένα ενδιαφέρον πρόσφατο ερευνητικό αντικείμενο αφορά την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων αποτελούμενων από εξαιρετικά μεγάλο πλήθος όψεων. Στις περιπτώσεις αυτές δεν είναι δυνατή η επεξεργασία του μοντέλου συνολικά, λόγω περιορισμών των υπολογιστικών πόρων, και διερευνώνται ποικίλες τεχνικές για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος. Θα ήταν ενδιαφέρουσα η προσαρμογή τόσο του αλγορίθμου κατασκευής προοδευτικών περιβλημάτων όσο και του αλγορίθμου εύρεσης τομής για το πρόβλημα αυτό, καθώς υπεισέρχονται νέες παράμετροι.

## 4 Απλοποίηση διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα

### 4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο απομακρυνόμαστε από τη μελέτη της απλοποίησης τριγωνικών μοντέλων και επεκκεντρωνόμαστε στην απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων. Όπως έχουμε αναφέρει, θα εξετάσουμε τετραεδρικά πλέγματα με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία. Η απλοποίηση τέτοιων τετραεδρικών πλεγμάτων δεν έχει αντιμετωπιστεί μέχρι τώρα, αν και υπάρχει ερευνητική δραστηριότητα σε δύο συναφή πεδία: στην απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα βαθμωτά πεδία, την οποία παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2, και στην απλοποίηση διανυσματικών πεδίων που είναι ορισμένα σε διάσπαρτα σημεία στα οποία δεν έχει ορισθεί κάποια συνδεσιμότητα. Τετραεδρικά πλέγματα με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία εμφανίζονται πλέον συχνά στην πράξη, και έτσι η απλοποίησή τους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε βασίζεται σε διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του τετραεδρικού πλέγματος, και λαμβάνει υπ' όψιν τόσο τη γεωμετρία του όσο και το εμφυτευμένο σε αυτό διανυσματικό πεδίο. Παρέχουμε εναλλακτικές υλοποιήσεις του αλγορίθμου, μία στατική στην οποία οι ακμές συρρικνώνονται σε ένα από τα δύο άκρα τους, και μία δυναμική στην οποία οι ακμές συρρικνώνονται σε κορυφή που προκύπτει από διαδικασία βελτιστοποίησης. Για την τελευταία, αναπτύσσουμε μία γενική μέθοδο επέκτασης αλγορίθμων απλοποίησης επιφανειών (τριγωνικών πλεγμάτων) σε τετραεδρικά πλέγματα. Μεριμνούμε επίσης για τη διατήρηση του συνόρου του τετραεδρικού πλέγματος, καθώς και για τη διατήρηση της τοπολογίας του εμφυτευμένου διανυσματικού πεδίου.

## 4.2 Σχετικές εργασίες

Οι υπάρχουσες ερευνητικές προσπάθειες για την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων περιορίζονται, όπως έχουμε αναφέρει, σε πλέγματα με εμφυτευμένα βαθμωτά πεδία. Σε αυτές αναφερθήκαμε αναλυτικά στην παράγραφο 2.2.3. Υπενθυμίζουμε ότι η πλειοψηφία των μεθόδων απλοποίησης χρησιμοποιεί διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος: επίσης η κορυφή που προκύπτει από κάθε συρρίκνωση ακμής τοποθετείται σε προκαθορισμένο, σταθερό σημείο, όπως το μέσο της ακμής ή ένα από τα δύο άκρα της.

Συναφείς με το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι επίσης οι μέθοδοι απλοποίησης διανυσματικών πεδίων που ορίζονται σε διάσπαρτα σημεία (scattered data vector fields). Στην περίπτωση αυτή, τα σημεία στα οποία γίνεται η δειγματοληψία του πεδίου θεωρούνται απομονωμένα, χωρίς να ορίζεται συνδεσιμότητα μεταξύ τους όπως στην περίπτωση των τετραεδρικών πλεγμάτων. Αυτός ήταν, ως πρόσφατα, ο συνηθέστερος τρόπος αναπαράστασης πεδίων, βαθμωτών και διανυσματικών, καθώς η έλλειψη συνδεσιμότητας απλουστεύει τη δομή τους και μειώνει την πληροφορία που φέρουν.

Στην περίπτωση αυτή, οι αλγόριθμοι απλοποίησης χρησιμοποιούν κυρίως τεχνικές συγχώνευσης των σημείων του πεδίου: με κατάλληλα κριτήρια, ο χώρος που καταλαμβάνει το πεδίο διαμερίζεται σε περιοχές και τα σημεία που ανήκουν σε κάθε περιοχή συγχωνεύονται σε ένα νέο. Η διαμέριση γίνεται κατά τρόπο ώστε το απλοποιημένο πεδίο που θα προκύψει μετά τη συγχώνευση των σημείων να διαφέρει κατά το δυνατό λιγότερο από το αρχικό· με το ίδιο κριτήριο υπολογίζονται τόσο η θέση του νέου σημείου κάθε περιοχής όσο και η τιμή του πεδίου σε αυτό. Στα διανυσματικά πεδία έχει μεγάλη σημασία η τοπολογία τους [HH91], η οποία εκφράζεται και οπτικοποιείται μέσω των ρευματογραμμών (streamlines), οι οποίες είναι καμπύλες που σχηματίζονται από τις κατευθύνσεις των διανυσμάτων του πεδίου, των τροχιογραμμών (streaklines), οι οποίες είναι καμπύλες που σχηματίζονται από τα ίχνη σωματιδίων που κινούνται με την επίδραση του πεδίου, και των κρίσιμων σημείων (critical points), στα οποία το πεδίο μηδενίζεται. Οι μέθοδοι απλοποίησης φροντίζουν να διατηρούν αυτά τα χαρακτηριστικά των διανυσματικών πεδίων ώστε να μην αλλοιώνεται η δομή και η απεικόνισή τους.

Στο [HWHJ99] το σφάλμα απλοποίησης μετράται από τη διαφορά των ρευ-

ματογραμμών μεταξύ του αρχικού και του απλοποιημένου πεδίου, και αυτή καθορίζει τη διαδικασία συγχώνευσης. Στο [TvW99] ξεκινώντας από μία πολύ λεπτή διαμέριση, υπολογίζεται ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα για κάθε περιοχή της διαμέρισης και αυτά τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για τη συνένωση παρόμοιων περιοχών· παρουσιάζεται επίσης μία εξελιγμένη τεχνική οπτικοποίησης του απλοποιημένου πεδίου με καμπυλωμένα διανύσματα. Στο [TSH00] εξετάζονται κυρίως διανυσματικά πεδία με εξαιρετικά μεγάλο πλήθος και πυκνότητα κρίσιμων σημείων· οι περιοχές της διαμέρισης δημιουργούνται με βάση τον αριθμό των κρίσιμων σημείων που περιέχονται σε κάθε μία από αυτές, και η απλοποίηση πραγματοποιείται με τη συγχώνευση των κρίσιμων σημείων κάθε περιοχής. Τέλος, στο [GPR<sup>+</sup>01] σημείο εκκίνησης είναι μία διαδικασία συγχώνευσης που παρουσιάζεται στη φύση, η οποία μοντελοποιείται ώστε να οδηγήσει την απλοποίηση διανυσματικών πεδίων, επαυξάνεται ώστε να βελτιστοποιηθεί το σχήμα των περιοχών διαμέρισης, και εφαρμόζεται κυρίως σε πεδία που αντιπροσωπεύουν ροή υγρών (flow fields).

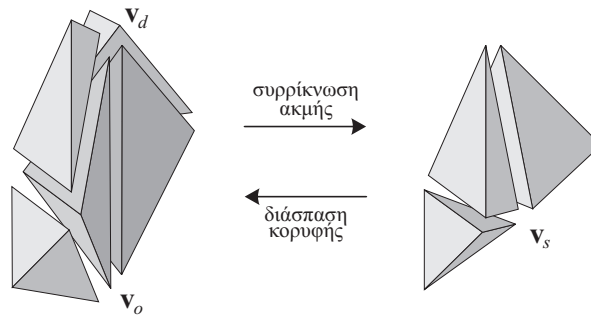
Κατόπιν τούτων, οι απαιτήσεις από έναν αλγόριθμο απλοποίησης τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία γίνονται εμφανείς: πρέπει να φροντίζει για τη διατήρηση του διανυσματικού πεδίου, με τρόπο ανάλογο των μεθόδων απλοποίησης πεδίων σε διάσπαρτα σημεία, ενώ συγχρόνως δεν αλλοιώνει τη δομή του τετραεδρικού πλέγματος.

## 4.3 Απλοποίηση

Για την απλοποίηση των διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα ακολουθούμε τον βασικό ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 2.1 απλοποίησης με διαδοχικές συρρίκνωσεις ακμών του πλέγματος. Στα επόμενα θα αναφερόμαστε στο αρχικό και στο απλοποιημένο πεδίο ως  $\Phi = (\mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$  και  $\Phi' = (\mathcal{V}', \mathcal{T}', \mathcal{F}')$  αντίστοιχα, και στους τομείς τους ως  $\Omega$  και  $\Omega'$ .

### 4.3.1 Συρρίκνωση ακμής σε τετραεδρικά πλέγματα

Η στοιχειώδης πράξη της συρρίκνωσης ακμής, στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος, μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και για την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων. Στο ΣΧΗΜΑ 4.1 παρουσιάζεται μία συρρίκνωση ακμής και η αντί-



— ΣΧΗΜΑ 4.1 —

Συρρίκνωση ακμής και διάσπαση κορυφής σε τετραεδρικό πλέγμα.

στροφή της διάσπαση κορυφής για ένα τετραεδρικό πλέγμα. Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των τετραέδρων γύρω από την ακμή, τα οποία διαγράφονται κατά την εφαρμογή της στο πλέγμα, είναι άγνωστο· επίσης ο αριθμός των τετραέδρων που επηρεάζονται είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με ένα τριγωνικό πλέγμα. Τα προοδευτικά τετραεδρικά πλέγματα που παράγονται με αυτή τη διαδικασία απλοποίησης διατηρούν όλες τις ιδιότητες των (τριγωνικών) προοδευτικών πλεγμάτων, όπως συνεχή επίπεδα λεπτομέρεια και δυνατότητα επιλεκτικής εκλέπτυνσης.

Κατά την απλοποίηση τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, το πρόβλημα εμπλουτίζεται με νέα στοιχεία σε σχέση με την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων, καθώς εκτός από τη γεωμετρία του πλέγματος πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και η διατήρηση του διανυσματικού πεδίου που είναι εμφυτευμένο σε αυτό. Έτσι, εκτός από τις ήδη γνωστές παραμέτρους του προβλήματος, δηλαδή τη θέση της νέας κορυφής μετά από κάθε συρρίκνωση ακμής και τον τρόπο απονομής προτεραιότητας στις συρρικνώσεις, προστίθεται μία ακόμα παράμετρος, ο προσδιορισμός του διανύσματος του πεδίου στη θέση της νέας κορυφής. Είναι εύλογο ότι η θέση της νέας κορυφής και η τιμή του πεδίου στη θέση αυτή είναι αλληλένδετοι παράγοντες, καθώς θα πρέπει να επιλεγούν ταυτόχρονα, με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλείται η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση στο διανυσματικό πεδίο λόγω αυτής της τοπικής αλλαγής. Θα αναλύσουμε το θέμα αυτό στην ενότητα 4.4.

### 4.3.2 Σφάλμα απλοποίησης

Το σφάλμα απλοποίησης που επέρχεται με κάθε συρρίκνωση ακμής, το οποίο είναι σημαντικό για την ταξινόμηση των ακμών στην ουρά προτεραιότητας, ορίζεται με τρόπο αντίστοιχο της απόστασης μεταξύ δύο τετραεδρικών πεδίων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, την οποία είχαμε παρουσιάσει στην παράγραφο 2.2.1.2. Έτσι το σφάλμα απλοποίησης διακρίνεται σε δύο παράγοντες:

- Στο **σφάλμα τομέα**, που αφορά την αλλαγή του συνόρου του πλέγματος· αυτός ο παράγοντας υπεισέρχεται μόνο κατά τη συρρίκνωση ακμών που έχουν μία ή και τις δύο κορυφές τους στο σύνορο του πλέγματος.
- Στο **σφάλμα πεδίου**, που αφορά τη μεταβολή του εμφυτευμένου διανυσματικού πεδίου.

Ο θεωρητικός ορισμός αυτών των παραγόντων σφάλματος που δώσαμε στην παράγραφο 2.2.1.2 δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη. Για την προσέγγισή τους, γίνεται δειγματοληψία σε συγκεκριμένα σημεία του πεδίου, στα οποία υπολογίζονται κατάλληλες εκφράσεις των παραγόντων αυτών. Θα επεκταθούμε στο θέμα αυτό στην ενότητα 4.5.

### 4.3.3 Εγκυρότητα συρρικνώσεων ακμών

Όπως και στα τριγωνικά πλέγματα, έτσι και στα τετραεδρικά, η συρρίκνωση ακμής ενδέχεται να προκαλέσει αλλαγές στην τοπολογία του πλέγματος. Για να αποφευχθούν αυτά τα προβλήματα, εξετάζονται κάποιες συνθήκες που διαφυλάσσουν την τοπολογία του τετραεδρικού πλέγματος μετά από κάθε συρρίκνωση ακμής:

- Η βασική τοπολογική συνθήκη της παραγράφου 2.2.4.3 επεκτείνεται άμεσα σε τετραεδρικά πλέγματα [CCM<sup>+</sup>00], και έτσι τη χρησιμοποιούμε για να αποκλείουμε συρρικνώσεις ακμών που θα οδηγούσαν σε αλλαγή της τοπολογίας του τετραεδρικού πλέγματος.
- Αφού υπολογιστεί η θέση της κορυφής που θα προκύψει μετά από μία συρρίκνωση ακμής, ελέγχουμε αν ο όγκος κάποιου από τα τετράεδρα που επηρεάζονται αλλάζει πρόσημο ή μηδενίζεται, ώστε να αποφύγουμε την

αντιστροφή τετραέδρων (που επίσης αποτελεί τοπολογικό πρόβλημα) ή τη δημιουργία εκφυλισμένων τετραέδρων.

#### 4.3.4 Διατήρηση συνόρου τετραεδρικού πλέγματος

Το σύνορο των τετραεδρικών πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται για την οπτικοποίηση δεδομένων ορίζει το χώρο στον οποίο πραγματοποιείται το πείραμα ή η εξομοίωση, και έτσι παρέχει σημαντική πληροφορία για το πεδίο. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να διατηρείται το σχήμα του κατά την απλοποίηση του πεδίου, όσο αυτό είναι δυνατό. Αν το σύνορο έχει πολύπλοκο σχήμα, μία τεχνική όπως αυτή που προτείνεται στο [SG98] είναι απαραίτητη, ώστε να αποφευχθούν αυτο-τομές κατά την απλοποίηση του συνόρου. Στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, όμως, το σύνορο των τετραεδρικών πεδίων που χρησιμοποιούνται είναι παραλληλόγραμμα ή καμπυλόγραμμα (για παράδειγμα το πεδίο *bluntnfin* που χρησιμοποιήσαμε στις δοκιμές μας, βλ. και το ΣΧΗΜΑ 4.8). Με αυτό υπ' όψιν, στον αλγόριθμο απλοποίησης που κατασκευάσαμε εφαρμόσαμε μία απλούστερη τεχνική, με σκοπό να διατηρείται το σχήμα των επίπεδων τμημάτων του συνόρου και να επιτρέπονται μικρές αλλαγές στα καμπυλόγραμμα τμήματα ώστε να μην εμποδίζεται η απλοποίηση. Η τεχνική μας συνίσταται στα εξής:

- Μία ακμή του πλέγματος που βρίσκεται πάνω στο σύνορο του πεδίου επιτρέπεται να συρρικνωθεί μόνο αν το σφάλμα τομέα που επέρχεται είναι μικρότερο από ένα όριο καθοριζόμενο από το χρήστη· το όριο αυτό είναι μηδενικό για πεδία με επίπεδο σύνορο παντού και πολύ μικρό για πεδία με καμπυλόγραμμα σύνορο. (Θα αναφερθούμε στον υπολογισμό του σφάλματος τομέα στην παράγραφο 4.5.1.2 παρακάτω.)
- Μία ακμή της οποίας μόνο μία κορυφή βρίσκεται στο σύνορο επιτρέπεται να συρρικνωθεί μόνο προς την κορυφή της που βρίσκεται στο σύνορο. Για μεγαλύτερη απλοποίηση του συνόρου, μπορεί να επιτραπεί και στην περίπτωση αυτή η παραμόρφωση του συνόρου μέχρι ένα άνω όριο σφάλματος τομέα, όπως προηγουμένως.
- Μία ακμή είναι δυνατό να έχει δύο κορυφές στο σύνορο του πεδίου αλλά να μην είναι η ίδια πάνω στο σύνορο (για παράδειγμα, μία εσωτερική ακμή μίας



τετραεδροποίησης κύβου με άκρα σε δύο διαφορετικές έδρες του κύβου)· σε αυτή την περίπτωση η συρρίκνωση της ακμής απαγορεύεται εντελώς.

#### 4.3.5 Διατήρηση κρίσιμων σημείων

Όπως αναφέραμε, τα κρίσιμα σημεία ενός διανυσματικού πεδίου είναι εκείνα τα σημεία του στα οποία η τιμή του πεδίου μηδενίζεται. Τα κρίσιμα σημεία αντιστοιχούν σε σημαντικά χαρακτηριστικά του πεδίου, και οι αλγόριθμοι απλοποίησης οφείλουν να τα διατηρούν τουλάχιστον στο βαθμό που δεν αλλοιώνεται η τοπολογία του πεδίου με την απάλειψή τους. Αν το πεδίο περιέχει πολλά και πυκνά κρίσιμα σημεία, μπορεί να αναλυθεί όπως περιγράφεται στο [TLHD03] και να απλοποιηθεί με μεθόδους όπως αυτές των [TSH00, dLvL99]. Επίσης ο αλγόριθμος που προτείνουμε και που βασίζεται σε συρρικνώσεις ακμών μπορεί να επαυξηθεί με μία τεχνική παρόμοια με αυτή που προτείνεται στο [CL03] ώστε να διατηρηθεί η τοπολογία του πεδίου.

Παρόλα αυτά, για διανυσματικά πεδία με σχετικά λίγα κρίσιμα σημεία εφαρμόσαμε μία απλούστερη αντιμετώπιση, ανάλογη με αυτή που περιγράψαμε για τη διατήρηση του συνόρου, με επιτυχία:

- Μία ακμή της οποίας και οι δύο κορυφές είναι κρίσιμα σημεία επιτρέπεται να συρρικνωθεί μόνο αν το μήκος της είναι μικρότερο από ένα όριο καθοριζόμενο από το χρήστη· αυτό το όριο τίθεται πάντα σχετικά μικρό, έτσι ώστε να είναι δυνατή η συγχώνευση κρίσιμων σημείων μόνο αν αυτά βρίσκονται πολύ κοντά και να μην επηρεάζεται σημαντικά η τοπολογία του πεδίου.
- Μία ακμή της οποίας μόνο η μία κορυφή είναι κρίσιμο σημείο, επιτρέπεται να συρρικνωθεί μόνο προς αυτή την κορυφή· επιπλέον η κορυφή διατηρεί τη μηδενική τιμή πεδίου, ώστε το κρίσιμο σημείο να μην εξαφανίζεται.

Σημειώνουμε εδώ ότι τα κρίσιμα σημεία δεν είναι απαραίτητο να βρίσκονται πάνω στις κορυφές του τετραεδρικού πλέγματος. Μπορούν όμως να εντοπιστούν, πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου της απλοποίησης, και τα τετράεδρα που περιέχουν κρίσιμα σημεία να διασπαστούν σχηματίζοντας νέα τετράεδρα με κορυφές στα κρίσιμα σημεία. Έτσι θα είναι δυνατή η αντιμετώπιση των κρίσιμων σημείων με τον τρόπο που περιγράψαμε στην παράγραφο αυτή.

## 4.4 Τρόποι προσδιορισμού της νέας κορυφής

Ο τρόπος προσδιορισμού της κορυφής που προκύπτει με κάθε συρρίκνωση ακμής αποτελεί, όπως έχουμε αναλύσει, καθοριστικό παράγοντα για το αποτέλεσμα της απλοποίησης. Στην περίπτωση των τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, πρέπει να συνεκτιμηθεί τόσο η θέση της κορυφής όσο και η τιμή του διανυσματικού πεδίου που θα αποδοθεί σε αυτή. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε δύο εναλλακτικούς τρόπους προσδιορισμού των στοιχείων αυτών.

### 4.4.1 Συρρικνώσεις ημι-ακμών

Ο πρώτος τρόπος προσδιορισμού της νέας κορυφής είναι παρόμοιος με αυτούς που έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα για την απλοποίηση βαθμωτών τετραεδρικών πεδίων, και οι οποίοι, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.2.3, είναι μέθοδοι απλοποίησης σταθερού σημείου.

Συγκεκριμένα, επιτρέπουμε στις ακμές να συρρικνώνονται μόνο σε ένα από τα δύο άκρα τους, και διατηρούμε την προηγούμενη τιμή του πεδίου στο σημείο αυτό. Έτσι για κάθε ακμή  $\{\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d\}$  δημιουργούνται δύο υποψήφιες συρρικνώσεις  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d) \rightarrow \mathbf{v}_d$  και  $(\mathbf{v}_d, \mathbf{v}_o) \rightarrow \mathbf{v}_o$ . Ονομάζουμε αυτό τον τρόπο συρρικνώσεις ημι-ακμών, από την ομώνυμη δομή παράστασης πολυγωνικών (και, κατ'επέκταση, πολυεδρικών) πλεγμάτων: ως ημι-ακμή θεωρείται η «κατευθυνόμενη» ακμή  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d)$ , και για κάθε «φυσική» ακμή  $\{\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d\}$  του μοντέλου υπάρχουν δύο αντίρροπες ημι-ακμές· με τον αλγόριθμό μας αυτές συρρικνώνονται στο δεύτερο άκρο τους.

Αυτό το σχήμα απλοποίησης είναι εξαιρετικά απλό και, ως προς την ταχύτητα απλοποίησης, αποτελεσματικό, καθώς δεν χρειάζεται κανένας υπολογισμός για τον καθορισμό της νέας κορυφής και της αντίστοιχης τιμής του πεδίου· επιπλέον, λιγότερες ακμές πρέπει να ενημερωθούν μετά από κάθε συρρίκνωση, καθώς τα τετράεδρα γύρω από την κορυφή που παραμένει στο πλέγμα δεν επηρεάζονται. Επίσης, οι δυνατότητες συμπίεσης του προοδευτικού πλέγματος είναι μεγαλύτερες καθώς χρησιμοποιούνται μόνο οι αρχικές θέσεις κορυφών και τιμές πεδίου. Για τον ίδιο λόγο, τέλος, η πιθανότητα να διαταραχθεί η τοπολογία του πεδίου είναι μικρότερη από ό,τι αν χρησιμοποιούνταν νέες θέσεις κορυφών και τιμές του πεδίου (εξάλλου η μέθοδος διατήρησης της τοπολογίας που περι-

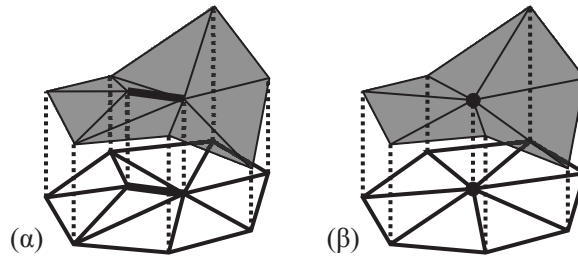
γράψαμε στην παράγραφο 4.3.5 παραπάνω βασίζεται ακριβώς σε συρρικνώσεις ημι-ακμών). Δυστυχώς η απλότητα αυτού του σχήματος απλοποίησης είναι συγχρόνως και ο μεγαλύτερος περιορισμός του, καθώς η σταθερότητα της νέας κορυφής μετά από κάθε συρρίκνωση ακμής περιορίζει τις δυνατότητες ποιοτικής απλοποίησης του πεδίου.

#### 4.4.2 Βελτιστοποιημένος προσδιορισμός νέας κορυφής

Εκτός από το προηγούμενο, «στατικό» σχήμα απλοποίησης με συρρικνώσεις ημι-ακμών, αναπτύξαμε και ένα πιο πολύπλοκο, δυναμικό σχήμα απλοποίησης στο οποίο η θέση της νέας κορυφής και η αντίστοιχη τιμή του διανυσματικού πεδίου προκύπτουν από μία διαδικασία βελτιστοποίησης. Η μέθοδός μας είναι αρκετά γενική, και επιτρέπει την εφαρμογή μεθόδων απλοποίησης επιφανειών (τριγωνικών πλεγμάτων), οι οποίες βελτιστοποιούν τη θέση της νέας κορυφής, σε διανυσματικά πεδία επί τετραεδρικών πλεγμάτων.

Για να επιτύχουμε την επέκταση των μεθόδων αυτών στα τετραεδρικά πλέγματα, παρατηρήσαμε ότι αυτές εργάζονται συνήθως με τις εξισώσεις των επιπέδων των τριγώνων που εφάπτονται στη συρρικνούμενη ακμή, και υπολογίζουν την απόσταση της νέας κορυφής από αυτά (πρβλ. και τη διαδικασία βελτιστοποίησης της μεθόδου των τετραγωνικών σφαλμάτων στην παράγραφο 2.2.4.7). Στα τετραεδρικά πλέγματα, τα αντίστοιχα γειτονικά στοιχεία κάθε ακμής είναι τα τετράεδρα που εφάπτονται στα άκρα της, όμως η συνήθης απόσταση από αυτά δεν έχει το αντίστοιχο νόημα. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι κάθε τετράεδρο ορίζεται από τέσσερα σημεία· έτσι η αντίστοιχη απόσταση είναι αυτή που μετράται σε ένα χώρο όπου τα τέσσερα σημεία ορίζουν ένα (υπερ)επίπεδο, δηλαδή στο χώρο των τεσσάρων διαστάσεων. Επομένως για να μπορέσουμε να επεκτείνουμε αυτές τις μεθόδους απλοποίησης τριγωνικών πλεγμάτων σε τετραεδρικά πλέγματα, οφείλουμε να εργαστούμε στο χώρο των τεσσάρων διαστάσεων. Στο χώρο αυτό θα συμβολίζουμε με  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και  $w$  τους άξονες συντεταγμένων.

Για την απλούστερη περίπτωση όπου επί του τετραεδρικού πλέγματος είναι ορισμένο ένα βαθμωτό πεδίο, στο [THKJ00] το πεδίο εμφυτεύεται στον τετραδιάστατο χώρο με φυσικό τρόπο, ως εξής: για κάθε κορυφή του πεδίου, η θέση της  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  αντιστοιχίζεται στο υπερεπίπεδο  $w = 0$ , δηλαδή στο σημείο  $(v_x, v_y, v_z, 0)$  του χώρου των τεσσάρων διαστάσεων, και η αντίστοιχη



— ΣΧΗΜΑ 4.2 —

Ένα βαθμωτό πεδίο ορισμένο επί ενός δισδιάστατου πλέγματος εντίθεται στον τρισδιάστατο χώρο και απλοποιείται με συρρίκνωση ακμής.

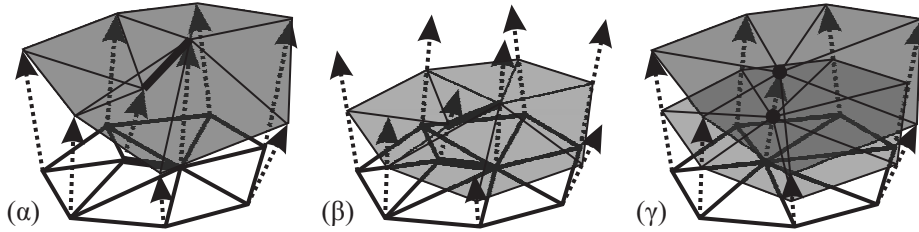
τιμή του πεδίου  $f$  αντιστοιχίζεται στον άξονα  $w$ , δηλαδή στο  $(0, 0, 0, f)$ . τελικά κατασκευάζεται ένα σύνθετο σημείο τεσσάρων διαστάσεων  $\mathbf{p}$  προσθέτοντας τα αντίστοιχα επιμέρους σημεία,

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, p_w) = (v_x, v_y, v_z, 0) + (0, 0, 0, f)$$

Αυτή η κατασκευή είναι εντελώς ανάλογη, στις τέσσερις διαστάσεις, των συνήθων υψομετρικών πεδίων (height fields), τα οποία είναι ουσιαστικά βαθμωτά πεδία επί ενός δισδιάστατου πλέγματος σημείων.

Με τον τρόπο αυτό, οι τέσσερις κορυφές κάθε τετραέδρου ορίζουν ένα υπερεπίπεδο στο χώρο των τεσσάρων διαστάσεων, και συνολικά τα σύνθετα σημεία του αρχικού πλέγματος σχηματίζουν μία τετραδιάστατη υπερεπιφάνεια. Αυτή μπορεί να απλοποιηθεί με συρρίκνώσεις των ακμών της, και η διαδικασία είναι εντελώς ανάλογη της συρρίκνωσης ακμών μίας τρισδιάστατης επιφάνειας, προσθέτοντας απλώς τη συντεταγμένη  $w$  (ΣΧΗΜΑ 4.2 για το τρισδιάστατο ανάλογο).

Για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει, όπου επί του τετραεδρικού πλέγματος είναι ορισμένο ένα διανυσματικό πεδίο, το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο καθώς εμπλέκονται περισσότερες διαστάσεις. Μία αντίστοιχη εμφύτευση θα οδηγούσε στις έξι διαστάσεις, όπου όμως τα τετραδιάστατα υπερεπίπεδα που θέλουμε να αξιοποιήσουμε είναι τετριμμένα. Έτσι, αντιστοιχίζουμε και πάλι τη θέση κάθε κορυφής  $\mathbf{v}$  στο υπερεπίπεδο  $w = 0$ , όμως αντιστοιχίζουμε την αντίστοιχη τιμή του πεδίου  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$  στο υπερεπίπεδο  $x = 0$  με αυτό τον τρόπο, προσθέτοντας τα αντίστοιχα τετραδιάστατα σημεία λαμβάνουμε ένα σύνθετο



— ΣΧΗΜΑ 4.3 —

Ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο επί ενός δισδιάστατου πλέγματος εντίθεται στον τρισδιάστατο χώρο. Οι δύο παραγόμενες επιφάνειες απλοποιούνται ταυτόχρονα ώστε να ορισθεί η θέση και η τιμή του πεδίου στη νέα κορυφή.

σημείο  $\mathbf{p}$  στις τέσσερις διαστάσεις, όπως επιθυμούσαμε:

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, p_w) = (v_x, v_y, v_z, 0) + (0, f_x, f_y, f_z) \quad (4.1)$$

Με την αντιστοίχιση αυτή προκύπτει, όπως και στην περίπτωση του βαθμωτού πεδίου, μία τετραδιάστατη υπερεπιφάνεια (ΣΧΗΜΑ 4.3(α) για το τρισδιάστατο ανάλογο). Όμως στην περίπτωση του διανυσματικού πεδίου, η υπερεπιφάνεια αυτή δεν αντιπροσωπεύει όλη την πληροφορία του αρχικού πεδίου, και συγκεκριμένα, μέρος της πληροφορίας κατεύθυνσης του διανυσματικού πεδίου χάνεται. Αυτό είναι εμφανές από το γεγονός ότι οι τέσσερις συντεταγμένες του σημείου  $\mathbf{p}$  δεν μπορούν να περιλάβουν όλη την πληροφορία των έξι συνολικά συντεταγμένων των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{f}$ . Εξάλλου, αν απλοποιούσαμε αυτή την υπερεπιφάνεια θα λαμβάναμε ένα σημείο που θα ήταν η κορυφή του αντίστοιχου διανύσματος, ενώ η κατεύθυνσή του δεν θα ήταν δυνατό να προσδιοριστεί.

Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό, σχηματίζουμε μία δεύτερη ενδιάμεση υπερεπιφάνεια, συνδυάζοντας τη θέση κάθε κορυφής του αρχικού πεδίου με ένα κλάσμα  $u_0 \in (0, 1)$ , σταθερό για όλες τις κορυφές, της αντίστοιχης τιμής του πεδίου και λαμβάνοντας έτσι ένα ενδιάμεσο σύνθετο σημείο  $\mathbf{m}$ : (ΣΧΗΜΑ 4.3(β) για το τρισδιάστατο ανάλογο)

$$\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z, m_w) = (v_x, v_y, v_z, 0) + u_0(0, f_x, f_y, f_z) \quad (4.2)$$

Για διευκόλυνση χρησιμοποιούμε  $u_0 = \frac{1}{2}$ .

Πλέον η κατεύθυνση του πεδίου μπορεί να ανακτηθεί εξετάζοντας τα αντίστοιχα σημεία από τις δύο υπερεπιφάνειες. Επιλύοντας τις σχέσεις (4.1) και (4.2) ως προς τα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{f}$  λαμβάνουμε:

$$f_x = (p_y - m_y)/(1 - u_0) \quad (4.3\alpha)$$

$$f_y = (p_z - m_z)/(1 - u_0) \quad (4.3\beta)$$

$$f_z = p_w = m_w/u_0 \quad (4.3\gamma)$$

$$v_x = p_x = m_x \quad (4.3\delta)$$

$$v_y = p_y - f_x \quad (4.3\epsilon)$$

$$v_z = p_z - f_y \quad (4.3\sigma\tau)$$

Για την απλοποίηση του διανυσματικού πεδίου πραγματοποιούμε ταυτόχρονα συρρικνώσεις ακμών στις δύο υπερεπιφάνειεςσε υπερεπιφάνεια, και τα δύο νέα τετραδιάστατα σημεία που προκύπτουν καθορίζουν τη θέση της νέας κορυφής στον τρισδιάστατο χώρο και την αντίστοιχη τιμή του διανύσματος του πεδίου, μέσω των σχέσεων (4.3) (ΣΧΗΜΑ 4.3(γ)).

Οι συρρικνώσεις ακμών στις δύο υπερεπιφάνειες μπορούν να βελτιστοποιηθούν επεκτείνοντας άμεσα στις τέσσερις διαστάσεις οποιαδήποτε μέθοδο απλοποίησης τριγωνικών πλεγμάτων χρησιμοποιεί τις εξισώσεις των επιπέδων των όψεων γύρω από τη συρρικνούμενη ακμή, και η επέκταση περιλαμβάνει απλώς την προσθήκη σε όλες τις εξισώσεις της τέταρτης συντεταγμένης  $w$ . Στην υλοποίησή μας χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των τετραγωνικών σφαλμάτων, την οποία ήδη περιγράψαμε στην παράγραφο 2.2.4.7, επεκτείνοντάς τη στις τέσσερις διαστάσεις με αυτό τον άμεσο τρόπο. Προτιμήσαμε αυτή τη μέθοδο γιατί αποδεδειγμένα παράγει αποτελέσματα υψηλής ποιότητας κατά την απλοποίηση τρισδιάστατων επιφανειών, σε μικρό χρόνο και με σχετικά μικρές απαιτήσεις σε μνήμη· αυτά τα χαρακτηριστικά γίνονται πιο σημαντικά για την εφαρμογή που εξετάζουμε, καθώς ο όγκος της πληροφορίας είναι πολύ μεγαλύτερος και για κάθε συρρίκνωση ακμής πρέπει να επιλυθούν δύο διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Σημειώνουμε, πάντως, ότι η τεχνική που περιγράψαμε υποθέτει ότι η μέθοδος απλοποίησης βάσει της οποίας πραγματοποιούνται οι ταυτόχρονοι συρρικνώσεις ακμών στις δύο υπερεπιφάνειες είναι γραμμικά ακριβής, δηλαδή αν

εφαρμόσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό σε μία επιφάνεια και κατόπιν την απλοποιήσουμε, θα λάβουμε το ίδιο αποτέλεσμα όπως αν εφαρμόζαμε τον μετασχηματισμό αυτό στο αποτέλεσμα της απλοποίησης της αρχικής επιφάνειας. Στην πράξη αυτό δεν ισχύει για τις μεθόδους απλοποίησης με συρρικνώσεις ακμών που έχουν προταθεί, όπως και για τη μέθοδο των τετραγωνικών σφαλμάτων που χρησιμοποιούμε, δεδομένου ότι πρόκειται για προσεγγιστικές μεθόδους που σε πολλά στάδια χρησιμοποιούν μη γραμμικές σχέσεις. Ευτυχώς, οι σχέσεις (4.3γ) και (4.3δ) παρέχουν έναν τρόπο να ελεγχθεί η καλή συμπεριφορά του αποτελέσματος: τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{m}$  πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις  $p_x = m_x$  και  $p_w = m_w/u_0$ . Στην υλοποίησή μας απαιτούμε να ισχύουν αυτές οι σχέσεις με μία ανοχή 0,1%, και απορρίπτουμε κάθε συρρίκνωση ακμής για την οποία αυτό δεν ισχύει. Επιπλέον, διορθώνουμε το  $\mathbf{m}$  διαιρώντας το με  $p_x/m_x$  ώστε τουλάχιστον η σχέση (4.3δ) να ικανοποιείται ακριβώς: αυτή η διόρθωση βελτιώνει σημαντικά την ποιότητα των αποτελεσμάτων. Αυτό το σημείο της μεθόδου δικαιολογεί και τον «πλεονασμό» που εμφανίζεται, να αντιπροσωπεύονται οι έξι συνολικά συντεταγμένες των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{f}$  με τις οκτώ συντεταγμένες των  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{m}$ .

Αναφέρουμε, τέλος, ότι η μέθοδος των τετραγωνικών σφαλμάτων έχει επεκταθεί στα [GH98, Hop99] για την απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων στις κορυφές των οποίων έχουν αντιστοιχηθεί χαρακτηριστικά όπως χρώμα, κανονικά διανύσματα ή πληροφορίες υψής, πρόβλημα το οποίο είναι πολύ συγγενές με αυτό που ερευνούμε. Στις δύο αυτές εργασίες, οι πίνακες και τα διανύσματα που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο των τετραγωνικών σφαλμάτων επεκτείνονται (με διαφορετικούς τρόπους) σε μεγαλύτερες διαστάσεις ώστε να περιλάβουν τις τιμές των χαρακτηριστικών. Παρόλα αυτά, πιστεύουμε ότι οι ιδέες που εφαρμόζουν δεν ταιριάζουν στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων επί τετραεδρικών πλεγμάτων. Στο [Hop99] τα χαρακτηριστικά κάθε κορυφής εξετάζονται χωριστά από τη γεωμετρία της, και έτσι η εργασία περιορίζεται στις τρεις διαστάσεις χωρίς να μπορεί να επεκταθεί με φυσικό τρόπο στις τέσσερις, όπως απαιτείται για την περίπτωσή μας. Στο [GH98] τα χαρακτηριστικά προσαρτώνται στη γεωμετρία δημιουργώντας ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στις έξι διαστάσεις: αν όμως για την επίλυσή του χρησιμοποιηθούν τετραδιάστατα τετραγωνικά σφάλματα, τότε η πρώτη συντεταγμένη της τιμής του πεδίου θα χρησιμοποιείται ως γεωμετρία, κάτι που είναι μάλλον αυθαίρετο. Η μέθοδος απλοποίησης που παρουσιάσαμε, επίσης συμπλέκει τη γεωμετρία με τις τιμές του

πεδίου λόγω της ιδιάζουσας, ίσως, αντιστοιχισής τους στις τέσσερις διαστάσεις μέσω των σχέσεων (4.1) και (4.2), όμως οι σχέσεις (4.3) μας επιτρέπουν να τις αποπλέξουμε και επίσης να ελέγξουμε τη συμπεριφορά της λύσης, με τον τρόπο που ήδη περιγράψαμε.

## 4.5 Εκτίμηση σφάλματος

Αφού παρουσιάσαμε τους τρόπους προσδιορισμού της κορυφής που προκύπτει με κάθε συρρίκνωση ακμής, στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τον άλλο σημαντικό παράγοντα του αλγορίθμου απλοποίησης, που είναι η εκτίμηση του σφάλματος που επιφέρει κάθε συρρίκνωση ακμής.

Όταν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος βελτιστοποίησης που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το σφάλμα μπορεί να εκτιμηθεί άμεσα από την έκφρασή του την οποία ελαχιστοποιεί η μέθοδος βελτιστοποίησης προκειμένου να εντοπίσει τη βέλτιστη θέση της κορυφής. Θα αναλύσουμε αυτό τον τρόπο προσδιορισμού του σφάλματος προς το τέλος της ενότητας, στην παράγραφο 4.5.2. Αντίθετα, όταν χρησιμοποιηθούν οι συρρικνώσεις ημι-ακμών, δεν υπάρχει διαθέσιμη κάποια εκτίμηση του σφάλματος. Για το λόγο αυτό αναπτύξαμε μία σύνθετη έκφρασή του, σε συμφωνία με τον ορισμό της παραγράφου 4.3.2, την οποία παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο. Αυτή η έκφραση του σφάλματος μπορεί επίσης να συνδυαστεί με τον βελτιστοποιημένο προσδιορισμό της κορυφής, και στην ενότητα 4.6 εξετάζουμε και αυτή την εκδοχή.

### 4.5.1 Σύνθετο σφάλμα

Για την εκτίμηση του σφάλματος που επιφέρει μία συρρίκνωση ακμής του τετραεδρικού πλέγματος στο διανυσματικό πεδίο, επιχειρήσαμε να ποσοτικοποιήσουμε τα σφάλματα τομέα και πεδίου και, συγχρόνως, να ελέγξουμε την ποιότητα του παραγόμενου τετραεδρικού πλέγματος όσον αφορά στο σχήμα των τετραέδρων. Η έκφραση που αναπτύξαμε είναι ένα ζυγισμένο άθροισμα παραγόντων:

$$E = w_{F_A} E_{F_A} + w_{F_L} E_{F_L} + w_D E_D + w_C E_C + w_V E_V \quad (4.4)$$



Οι παράγοντες  $E_k$  της έκφρασης αυτής αναλύονται αμέσως παρακάτω· συνοπτικά, οι δύο πρώτοι εκτιμούν το σφάλμα πεδίου, ο τρίτος το σφάλμα τομέα και οι δύο τελευταίοι ελέγχουν την ποιότητα του πλέγματος. Τα βάρη  $w_k$  στην παραπάνω σχέση καθορίζονται από το χρήστη. Σημειώνουμε εδώ ότι, καθώς οι επιμέρους παράγοντες σφάλματος εκφράζονται σε διαφορετικές κλίμακες μεγέθους, καθέναν από αυτούς κανονικοποιείται στο διάστημα  $[0, 1]$  όταν οι αρχικές ακμές του πεδίου εισέρχονται στην ουρά προτεραιότητας κατά το πρώτο βήμα του αλγορίθμου απλοποίησης, και οι συντελεστές κανονικοποίησης που προκύπτουν χρησιμοποιούνται κατόπιν σε όλη τη διάρκεια του αλγορίθμου.

Στα επόμενα θα αναφερόμαστε σε συρρίκνωση ακμής  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d) \rightarrow \mathbf{v}_s$  ή σε συρρίκνωση ημι-ακμής  $(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d) \rightarrow \mathbf{v}_d$ .

#### 4.5.1.1 Σφάλμα πεδίου

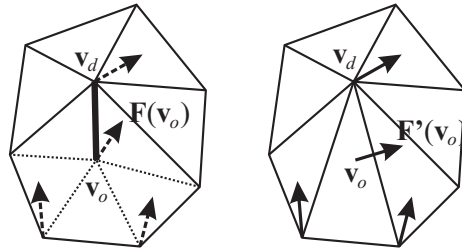
Οι παράγοντες  $E_{FA}$  και  $E_{FL}$  εκτιμούν το σφάλμα πεδίου της απλοποίησης. Ο  $E_{FA}$  μετράει τη γωνία απόκλισης μεταξύ του αρχικού και του απλοποιημένου πεδίου, και ο  $E_{FL}$  τη (διανυσματική) διαφορά τους. Καθώς αυτοί οι παράγοντες δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν με ακρίβεια, υπολογίζονται με μία διαδικασία δειγματοληψίας σε σημεία του πεδίου μέσα στο άστρο της συρρικνούμενης ακμής. Στην υλοποίησή μας πραγματοποιούμε τη δειγματοληψία μόνο στις κορυφές της συρρικνούμενης ακμής, ως αντιπροσωπευτικά σημεία του άστρου της.

Πιο αναλυτικά, όταν χρησιμοποιούνται συρρικνώσεις ημι-ακμών, λαμβάνεται με παρεμβολή η τιμή  $\mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)$  του απλοποιημένου πεδίου στη διαγραμμένη κορυφή  $\mathbf{v}_o$  (ΣΧΗΜΑ 4.4): θέτουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} E_{FA} &= \angle(\mathbf{F}(\mathbf{v}_o), \mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)) \\ E_{FL} &= \|\mathbf{F}(\mathbf{v}_o) - \mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)\| \end{aligned}$$

(όπου  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι η γωνία των διανυσμάτων  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ ).

Όταν η νέα κορυφή προκύπτει από διαδικασία βελτιστοποίησης, υπολογίζουμε τις τιμές  $\mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)$  και  $\mathbf{F}'(\mathbf{v}_d)$  του απλοποιημένου πεδίου στις δύο κορυφές της συρρικνούμενης ακμής και ως εκτίμηση των παραπάνω σφαλμάτων παίρνουμε το μέγιστο των σφαλμάτων σε αυτά τα δύο σημεία:



— ΣΧΗΜΑ 4.4 —

Το σφάλμα πεδίου για συρρικνώσεις ημι-ακμών εκτιμάται από τις τιμές του πεδίου στη διαγραμμένη ακμή πριν και μετά τη συρρίκνωση της ακμής.

$$E_{FA} = \max\{\angle(\mathbf{F}(\mathbf{v}_o), \mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)), \angle(\mathbf{F}(\mathbf{v}_d), \mathbf{F}'(\mathbf{v}_d))\}$$

$$E_{FL} = \max\{\|\mathbf{F}(\mathbf{v}_o) - \mathbf{F}'(\mathbf{v}_o)\|, \|\mathbf{F}(\mathbf{v}_d) - \mathbf{F}'(\mathbf{v}_d)\|\}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή  $\mathbf{F}'(\mathbf{v})$  για ένα οποιοδήποτε σημείο  $\mathbf{v}$  το οποίο δεν είναι κορυφή του απλοποιημένου πεδίου, σχηματίζουμε τα τετράεδρα που θα δημιουργούνταν με τη συρρίκνωση αυτή, αντικαθιστώντας τη νέα κορυφή και την αντίστοιχη τιμή του πεδίου στα τετράεδρα που επηρεάζονται· βρίσκουμε ποιο από αυτά τα νέα τετράεδρα περιέχει το σημείο  $\mathbf{v}$ , και υπολογίζουμε την τιμή  $\mathbf{F}'(\mathbf{v})$  με γραμμική παρεμβολή των τιμών του απλοποιημένου πεδίου στις κορυφές αυτού του τετράεδρου. Αν το σύνορο του πεδίου μεταβάλλεται, υπάρχει πιθανότητα το σημείο  $\mathbf{v}$  να μην περιέχεται σε κανένα τετράεδρο του νέου πεδίου. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε το νέο τετράεδρο του οποίου το κέντρο είναι πλησιέστερο στο  $\mathbf{v}$  και υπολογίζουμε την τιμή  $\mathbf{F}'(\mathbf{v})$  με παρεκβολή (extrapolation) των τιμών του πεδίου στις κορυφές του· αν περισσότερα από ένα τετράεδρα βρίσκονται στην ίδια ελάχιστη απόσταση από το  $\mathbf{v}$ , υπολογίζουμε τις τιμές του πεδίου στο  $\mathbf{v}$  για καθένα από αυτά και λαμβάνουμε το μέσο όρο τους.

Κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου απλοποίησης, και με σκοπό να εκφραστεί καλύτερα το συνολικό σφάλμα σε σχέση με το αρχικό πεδίο, οι δύο παράγοντες του σφάλματος πεδίου συσσωρεύονται· έτσι κάθε υποψήφια συρρίκνωση ακμής μεταφέρει αναδρομικά το σφάλμα που έχουν προκαλέσει όλες οι ακμές που έχουν προηγουμένως συρρικνωθεί στα άκρα της.

### 4.5.1.2 Σφάλμα τομέα

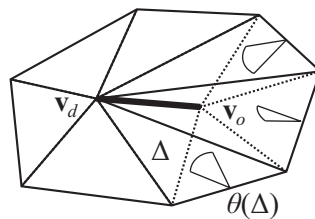
Το σφάλμα τομέα παρουσιάζεται μόνο όταν η συρρίκνωση μίας ακμής μεταβάλλει το σύνορο του πεδίου, όπως περιγράψαμε στην παράγραφο 4.3.2 σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που θέσαμε στην παράγραφο 4.3.4 για τη διατήρηση του συνόρου του πλέγματος, αυτό συμβαίνει μόνο κατά τη συρρίκνωση συνοριακών ακμών.

Για την εκτίμηση αυτού του σφάλματος χρησιμοποιήσαμε αρχικά τη μέγιστη απόσταση των κορυφών της συρρικνούμενης ακμής από τις συνοριακές όψεις των νέων τετραέδρων, ως μία προσέγγιση της απόστασης Hausdorff μεταξύ των συνόρων του πλέγματος πριν και μετά τη συρρίκνωση της ακμής. Παρόλα αυτά, οι δοκιμές μας έδειξαν ότι αυτή η εκτίμηση του σφάλματος τομέα αποτύγχανε να διατηρήσει ικανοποιητικά το σύνορο του πεδίου.

Καταλήξαμε λοιπόν να εκτιμούμε το σφάλμα τομέα βάσει των διέδρων γωνιών μεταξύ αντίστοιχων συνοριακών όψεων του τετραεδρικού πλέγματος πριν και μετά τη συρρίκνωση της ακμής (ΣΧΗΜΑ 4.5). Συγκεκριμένα, αν  $\mathcal{BF}'(\mathbf{v}_s)$  είναι το σύνολο των συνοριακών όψεων γύρω από τη νέα κορυφή  $\mathbf{v}_s$  που μεταβλήθηκαν κατά τη συρρίκνωση και  $\theta(\Delta)$  είναι η γωνία που αναφέραμε για μία όψη  $\Delta \in \mathcal{BF}'(\mathbf{v}_s)$ , θέτουμε

$$E_D = \max_{\Delta \in \mathcal{BF}'(\mathbf{v}_s)} \theta(\Delta)$$

Οι δοκιμές μας έδειξαν ότι αυτή η εκτίμηση του σφάλματος τομέα, βασισμένη στην απόκλιση των γωνιών των συνοριακών όψεων, παρέχει έναν αξιόπιστο



— ΣΧΗΜΑ 4.5 —

Το σφάλμα τομέα εκτιμάται βάσει των διέδρων γωνιών  $\theta(\Delta)$  μεταξύ αντίστοιχων συνοριακών όψεων πριν και μετά τη συρρίκνωση ακμής (εδώ παρουσιάζουμε τη συρρίκνωση ημι-ακμής).

τρόπο διατήρησης του συνόρου του πεδίου. Εξάλλου αποτελεί ένα πολύ διαισθητικό μέτρο, η σημασία του οποίου γίνεται εύκολα κατανοητή. Σημειώνουμε ότι, όπως και το σφάλμα πεδίου, έτσι και το σφάλμα τομέα συσσωρεύεται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου, έτσι ώστε η μεταβολή του συνόρου να λογίζεται στη βάση του συνόρου του αρχικού πλέγματος.

#### 4.5.1.3 Σφάλμα ποιότητας τετραεδρικού πλέγματος

Οι δύο τελευταίοι παράγοντες  $E_C$  και  $E_V$  του σφάλματος στη σχέση (4.4) ελέγχουν την ποιότητα του παραγόμενου τετραεδρικού πλέγματος.

Ο παράγοντας  $E_C$  αποτρέπει τη δημιουργία μακρόστενων τετραέδρων, τα οποία, ανάλογα με στην περίπτωση των τριγωνικών πλεγμάτων (πρβλ. την παράγραφο 3.3.2.2) δημιουργούν προβλήματα στην οπτικοποίηση αλλά και στις συχνά απαραίτητες παρεμβολές στα τετραεδρικά πλέγματα. Ως μέτρο της συμπαγείας ενός τετραέδρου  $T$  χρησιμοποιούμε την τιμή [MW95]

$$c = \frac{6\sqrt{2}S}{L_\mu^3}$$

όπου  $S$  είναι ο όγκος του  $T$  και  $L_\mu$  είναι το μέσο μήκος των ακμών του· αυτή η σχέση δίνει 0 για ένα επίπεδο τετράεδρο και 1 για ένα κανονικό.

Υπολογίζουμε την ελάχιστη συμπαγεία  $c_{min}$  των τετραέδρων γύρω από την ακμή  $\{\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_d\}$  καθώς και την ελάχιστη συμπαγεία  $c'_{min}$  των τετραέδρων γύρω από τη νέα κορυφή  $\mathbf{v}_c$  και θέτουμε

$$E_C = \frac{c_{min}}{c'_{min}}$$

ως ένα μέτρο της χειροτέρευσης της συμπαγείας των τετραέδρων λόγω της συρρίκνωσης.

Ο παράγοντας  $E_V$  αποτρέπει την ύπαρξη κορυφών με υψηλό σθένος στο τετραεδρικό πλέγμα, καθώς και αυτές επιβαρύνουν την οπτικοποίηση του τετραεδρικού πλέγματος. Ως  $E_V$  θέτουμε απλώς τον αριθμό των τετραέδρων γύρω από την κορυφή  $\mathbf{v}_c$  μετά τη συρρίκνωση,

$$E_V = \text{valence}'(\mathbf{v}_c),$$

βασιζόμενοι στη διαπίστωση ότι συνήθως τα αρχικά τετραεδρικά πλέγματα έχουν γενικά ομοιόμορφη κατανομή των τετραέδρων γύρω από τις κορυφές τους.

#### 4.5.2 Τετραγωνικό σφάλμα

Το σύνθετο σφάλμα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι απαραίτητο, όπως αναφέραμε και στην αρχή της ενότητας, κατά την εφαρμογή συρρικνώσεων ημι-ακμών στο διανυσματικό πεδίο, καθώς η μέθοδος αυτή δεν χρησιμοποιεί κάποια εκτίμηση του σφάλματος απλοποίησης. Αντίθετα, όταν εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης της νέας κορυφής που αναπτύξαμε στην παράγραφο 4.4.2, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε μία άμεση προσέγγιση για την εκτίμηση του σφάλματος.

Συγκεκριμένα, όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια για τα τριγωνικά πλέγματα, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί κάποια έκφραση του σφάλματος απλοποίησης, την οποία ελαχιστοποιεί για να υπολογίσει τη βέλτιστη θέση της κορυφής. Με δεδομένη την αμφίδρομη αντιστοίχιση που έχουμε χρησιμοποιήσει μεταξύ του διανυσματικού πεδίου και του χώρου των τεσσάρων διαστάσεων στον οποίο γίνεται η απλοποίηση, το μέτρο του σφάλματος του αλγορίθμου βελτιστοποίησης παρέχει μία εκτίμηση του σφάλματος που προκαλεί η συρρίκνωση στο πεδίο.

Στην περίπτωση της μεθόδου απλοποίησης με τετραγωνικά σφάλματα που χρησιμοποιούμε, η εκτίμηση του σφάλματος είναι το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων της νέας κορυφής από το σύνολο των όψεων γύρω από τη συρρικνούμενη ακμή (βλ. την παράγραφο 2.2.4.7). Ο αλγόριθμός μας υπολογίζει δύο τέτοιες αποστάσεις, μία για κάθε μία από τις δύο υπερεπιφάνειες που απλοποιούνται ταυτόχρονα. Ως εκτίμηση του σφάλματος επιλέγουμε αυθαίρετα να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση στην εξωτερική επιφάνεια (αυτή που σχηματίζεται από τα σημεία  $\mathbf{p}$  με τη σχέση (4.1)), ενώ εναλλακτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η απόσταση στην ενδιάμεση επιφάνεια ή ένας συνδυασμός των δύο.

Ως προς την ποιότητα του παραγόμενου τετραεδρικού πλέγματος, η χρήση της μεθόδου απλοποίησης τετραγωνικού σφάλματος για την απλοποίηση των επιμέρους υπερεπιφανειών εγγυάται ένα καλό αποτέλεσμα, καθώς έχει αποδειχθεί ότι, στην απλοποίηση τριγωνικών πλεγμάτων όπου έχει μελετηθεί μέχρι τώρα, η μέθοδος αυτή παράγει τρίγωνα καλού σχήματος (βλ. και το τέλος της

παραγράφου 2.2.2.4).

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό σφάλμα επιτυγχάνουμε ταυτόχρονα τη βελτιστοποίηση του διανυσματικού πεδίου και τον έλεγχο της ποιότητας του τετραεδρικού πλέγματος· συνεπώς αυτή η εκτίμηση του σφάλματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτοτελώς, χωρίς την ανάγκη προσθήκης κάποιων από τους παράγοντες της σύνθετης έκφρασης (4.4) του σφάλματος.

## 4.6 Αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος απλοποίησης διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο αυτό υλοποιήθηκε ως άρθρωμα του προγράμματος OpenDX.

Το OpenDX (Open Visualization Data Explorer) είναι ένα προηγμένο και ευέλικτο πρόγραμμα οπτικοποίησης δεδομένων. Αναπτύχθηκε από την εταιρεία IBM αρχικά ως εμπορικό προϊόν αλλά εδώ και λίγα χρόνια ο κώδικάς του έγινε ελεύθερα διαθέσιμος και η χρήση του είναι επίσης ελεύθερη. Το πρόγραμμα παρέχει πολλές δυνατότητες οπτικοποίησης δεδομένων στις δύο και στις τρεις διαστάσεις όπως τέμνοντα επίπεδα, φωτοσκίαση όγκου, σχεδίαση ρευματογραμμών και τροchioγραμμών και άλλες. Η λειτουργικότητα του προγράμματος παρέχεται μέσω ανεξάρτητων αρθρωμάτων, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν ελεύθερα από το χρήστη για την παραγωγή κατάλληλης οπτικοποίησης των δεδομένων του. Επιπλέον, νέα αρθρώματα μπορούν να κατασκευαστούν, είτε συνδυάζοντας υπάρχοντα, είτε με προγραμματισμό σε C/C++ ή κάποιες άλλες γλώσσες προγραμματισμού. Για την εφαρμογή μας, υλοποιήσαμε τον αλγόριθμο απλοποίησης σε ένα νέο άρθρωμα και χρησιμοποιήσαμε τις δυνατότητες του προγράμματος για είσοδο και οπτικοποίηση των διανυσματικών πεδίων.

Οι δοκιμές μας πραγματοποιήθηκαν σε προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή AMD Athlon XP 2000+ με 512MB μνήμης RAM.

Παρακάτω δίνουμε τις λεπτομέρειες των δοκιμών απλοποίησης που πραγματοποιήσαμε και των αποτελεσμάτων που λάβαμε. Πριν από αυτό, παρουσιάζουμε τη μέθοδο με την οποία συγκρίναμε τα απλοποιημένα με τα αρχικά πεδία. Σημειώνουμε ότι η υλοποίηση της σύγκρισης των πεδίων έγινε επίσης ως ένα άρθρωμα του OpenDX.

#### 4.6.1 Μέθοδος σύγκρισης διανυσματικών πεδίων σε τετραεδρικά πλέγματα

Για να ποσοτικοποιήσουμε το πραγματικό σφάλμα των απλοποιημένων πεδίων που παράγουμε, πραγματοποιούμε δειγματοληψία του αρχικού πεδίου  $\Phi$  και του απλοποιημένου  $\Phi'$  σε ένα κοινό σύνολο σημείων  $S$  στις κορυφές ενός πυκνού κανονικού πλέγματος που τα καλύπτει. Οι τιμές κάθε πεδίου σε ένα σημείο δειγματοληψίας υπολογίζονται, όπως και στην παράγραφο 4.5.1.1, βρίσκοντας το τετράεδρο που περιέχει το σημείο δειγματοληψίας και παρεμβάλλοντας τις τιμές του πεδίου στις κορυφές αυτού του τετραέδρου: αν το σημείο βρίσκεται έξω από τον τομέα του πεδίου, η τιμή του εκτιμάται με παρεκβολή ως προς τα πλησιέστερα συνοριακά τετράεδρα. Για τον αποτελεσματικότερο εντοπισμό των τετραέδρων που περιέχουν ή είναι πλησιέστερα στα σημεία δειγματοληψίας, χρησιμοποιείται ένα βοηθητικό (αραιό) κανονικό πλέγμα που καλύπτει το κάθε πεδίο και του οποίου κάθε περιοχή περιέχει αναφορές στα τετράεδρα του πλέγματος που καλύπτουν το εσωτερικό της.

Για κάθε σημείο δειγματοληψίας  $\mathbf{x} \in S$  συλλέγουμε τις αντίστοιχες τιμές των πεδίων,  $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S\}$  και  $\{\mathbf{F}'(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S\}$ , και υπολογίζουμε μια σειρά μέτρων του σφάλματος μεταξύ του αρχικού και του απλοποιημένου πεδίου: (παρακάτω συμβολίζουμε με  $|S|$  το πλήθος των στοιχείων του  $S$ )

- **Μέγιστη και μέση απόκλιση γωνιών:**

Αν  $\epsilon_A(\mathbf{x}) = \angle(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}'(\mathbf{x}))$ , θέτουμε

$$\epsilon_A^{max} = \max_{\mathbf{x} \in S} \{\epsilon_A(\mathbf{x})\}$$

$$\epsilon_A^{mean} = \frac{1}{|S|} \sum_{\mathbf{x} \in S} \epsilon_A(\mathbf{x})$$

- **Μέγιστη και μέση απόκλιση διανυσμάτων:**

Αν  $\epsilon_L(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{x})\|$ , θέτουμε

$$\epsilon_L^{max} = \max_{\mathbf{x} \in S} \{\epsilon_L(\mathbf{x})\}$$

$$\epsilon_L^{mean} = \frac{1}{|S|} \sum_{\mathbf{x} \in S} \epsilon_L(\mathbf{x})$$

Στα επόμενα, οι αποκλίσεις γωνιών εκφράζονται σε μοίρες. Επίσης, για να είναι πιο αντιπροσωπευτικές, οι αποκλίσεις διανυσμάτων εκφράζονται ως ποσοστά του εύρους  $r$  των μηκών των διανυσμάτων του αρχικού πεδίου  $\Phi$ ,

$$r = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|\} - \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|\}.$$

#### 4.6.2 Επιδόσεις διαμορφώσεων του αλγορίθμου

Εξετάσαμε τρεις διαμορφώσεις του αλγορίθμου απλοποίησης, με σκοπό να αξιολογήσουμε τους εναλλακτικούς τρόπους τοποθέτησης της νέας κορυφής καθώς και εκτίμησης του σφάλματος που αναπτύξαμε:

- (1) Συρρικνώσεις ημι-ακμών με το σύνθετο σφάλμα.
- (2) Βελτιστοποίηση νέας κορυφής με το σύνθετο σφάλμα.
- (3) Βελτιστοποίηση νέας κορυφής με το τετραγωνικό σφάλμα.

Οι διαμορφώσεις (1) και (3) είναι οι πιο «φυσικές» καθώς το σύνθετο σφάλμα αναπτύχθηκε για να συμπληρώσει τις συρρικνώσεις ημι-ακμών οι οποίες δεν παρέχουν κάποιο άμεσο τρόπο εκτίμησης του σφάλματος, ενώ το τετραγωνικό σφάλμα συμπληρώνει φυσιολογικά τη βελτιστοποίηση της νέας κορυφής όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.5.2. Η διαμόρφωση (2) είναι ουσιαστικά ένας πειραματισμός ως προς την απόδοση του σύνθετου σφάλματος. Δεν δοκιμάσαμε τον τέταρτο δυνατό συνδυασμό, δηλαδή συρρικνώσεις ημι-ακμών με το τετραγωνικό σφάλμα, καθώς θεωρήσαμε ότι αν υλοποιηθεί το τετραγωνικό σφάλμα δεν θα είχε νόημα η μη χρήση του για βελτιστοποίηση της νέας κορυφής.

Χρησιμοποιήσαμε τα εξής μοντέλα: ένα **γραμμικό** διανυσματικό πεδίο που κατασκευάσαμε στις κορυφές ενός ομοιόμορφα διαμερισμένου κύβου με τη συνάρτηση  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2x, 0)$ , (3.645 τετράεδρα)· ένα μοντέλο που αντιπροσωπεύει το πεδίο **βαρύτητας** που αναπτύσσεται μεταξύ τριών σφαιρών, περιορισμένο σε έναν κύβο (121.945 τετράεδρα)· μία διανυσματική συνιστώσα του πεδίου **bluntn**, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για την αξιολόγηση μεθόδων οπτικοποίησης δεδομένων (187.318 τετράεδρα)· και ένα πεδίο που προκύπτει από την προσομοίωση ροής υγρού μέσα από ένα **σωλήνα** (10.872 τετράεδρα).

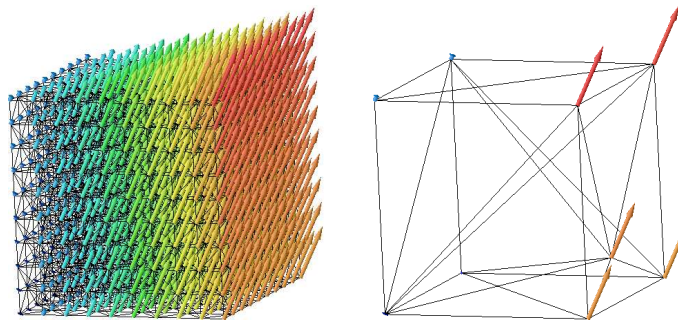
Οι παράμετροι που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του αλγορίθμου μας είναι:



- Το όριο παραμόρφωσης του συνόρου (βλ. την παράγραφο 4.3.4). Η παραμόρφωση του συνόρου εκτιμήθηκε σε όλες τις διαμορφώσεις του αλγορίθμου απλοποίησης με τον τρόπο που αναπτύξαμε στην παράγραφο 4.5.1.2. Έτσι το όριο παραμόρφωσης τέθηκε στο μηδέν για τα δύο πρώτα μοντέλα, των οποίων το σύνορο είναι παραλληλεπίπεδο, και σε  $\pi/4$  για τα υπόλοιπα μοντέλα, των οποίων το σύνορο είναι κατά τμήματα καμπυλόγραμμο.
- Το όριο συγχώνευσης κρίσιμων σημείων (βλ. την παράγραφο 4.3.5). Αυτό τέθηκε στο μηδέν σε όλες τις περιπτώσεις.
- Οι συντελεστές βάρους των παραγόντων του σύνθετου σφάλματος (σχέση (4.4)) για τις διαμορφώσεις (1) και (2). Θα αναφερθούμε αναλυτικά σε αυτούς παρακάτω.

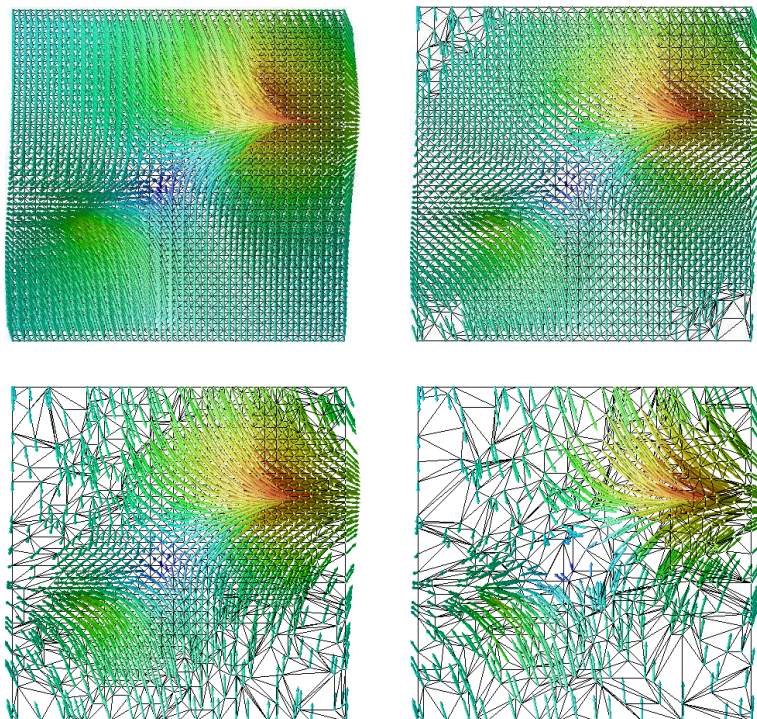
Από τα μοντέλα που δοκιμάσαμε, το **γραμμικό** πεδίο απλοποιήθηκε *ακριβώς* με όλες τις διαμορφώσεις του αλγορίθμου (ΣΧΗΜΑ 4.6). Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο όταν γίνονται συρρικνώσεις ημι-ακμών (διαμόρφωση (1)), καθώς το πεδίο είναι παντού γραμμικό και επαναχρησιμοποιούνται οι αρχικές κορυφές και τιμές του πεδίου. Όταν η νέα κορυφή προκύπτει από διαδικασία βελτιστοποίησης με τον τρόπο που αναπτύξαμε στην παράγραφο 4.4.2, η ακρίβεια της απλοποίησης αυτού του πεδίου εξαρτάται από τη γραμμική ακρίβεια της μεθόδου (βλ. τις σχετικές παρατηρήσεις στην ίδια παράγραφο, σελ. 82). Εδώ αναδεικνύεται η αξία των περιορισμών και της διόρθωσης που επιβάλλουμε στις συντεταγμένες της νέας κορυφής και στην τιμή του πεδίου, καθώς χωρίς αυτούς τους παράγοντες το γραμμικό πεδίο δεν απλοποιείται ακριβώς, όπως φάνηκε από δοκιμές που πραγματοποιήσαμε.

Τα υπόλοιπα μοντέλα απλοποιήθηκαν στο 50%, 25% και 10% των αρχικών τους τετραέδρων με τις τρεις διαμορφώσεις του αλγορίθμου που αναφέραμε και αναλύουμε τα αποτελέσματα παρακάτω. Τα ΣΧΗΜΑΤΑ 4.7–4.10 επιδεικνύουν κάποια από τα αποτελέσματα που λάβαμε. Είναι φανερό ότι σε όλες τις περιπτώσεις, τα πεδία απλοποιήθηκαν περισσότερο στις περιοχές τους όπου είναι πιο ομοιογενή και διατηρήθηκαν όλα τα σημαντικά χαρακτηριστικά τους. Τα καμπυλόγραμμα σύνορα των δύο τελευταίων μοντέλων απλοποιήθηκαν σε μικρό βαθμό χωρίς ιδιαίτερη παραμόρφωση, και τα κρίσιμα σημεία όλων των πεδίων (για παράδειγμα, στα κέντρα των σφαιρών στο πεδίο βαρύτητας) παρέμειναν αμετάβλητα.



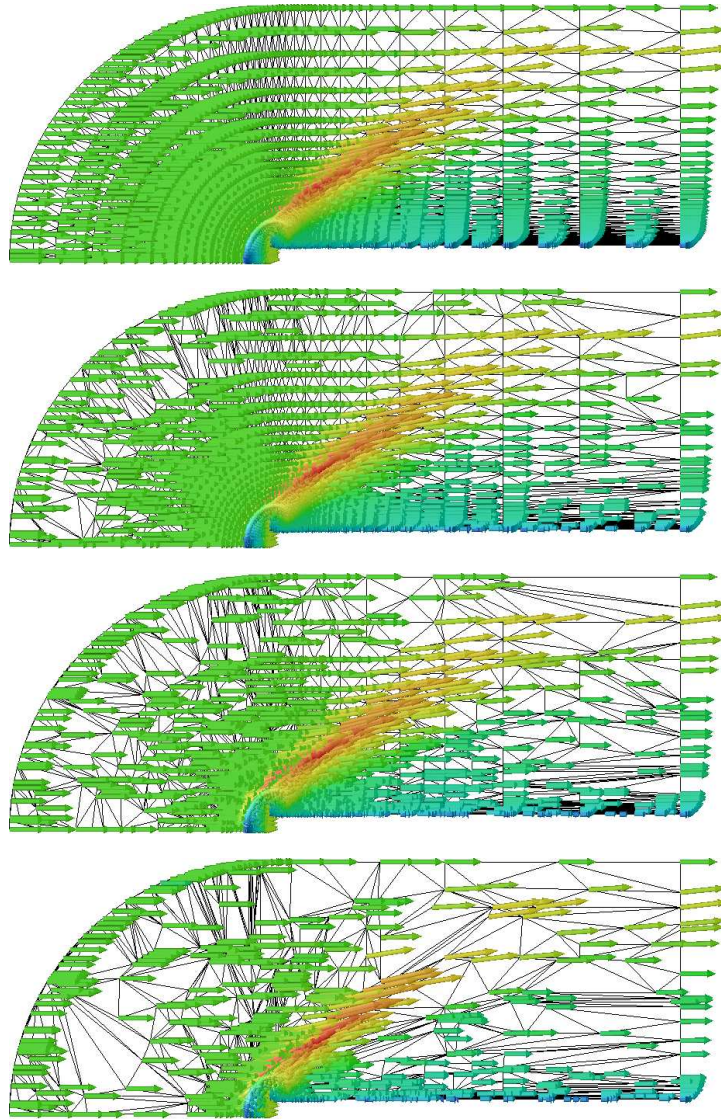
— ΣΧΗΜΑ 4.6 —

Το γραμμικό πεδίο, αρχικό (3.645 τετράεδρα) και απλοποιημένο με συρρικνώσεις ημι-ακμών (10 τετράεδρα).



— ΣΧΗΜΑ 4.7 —

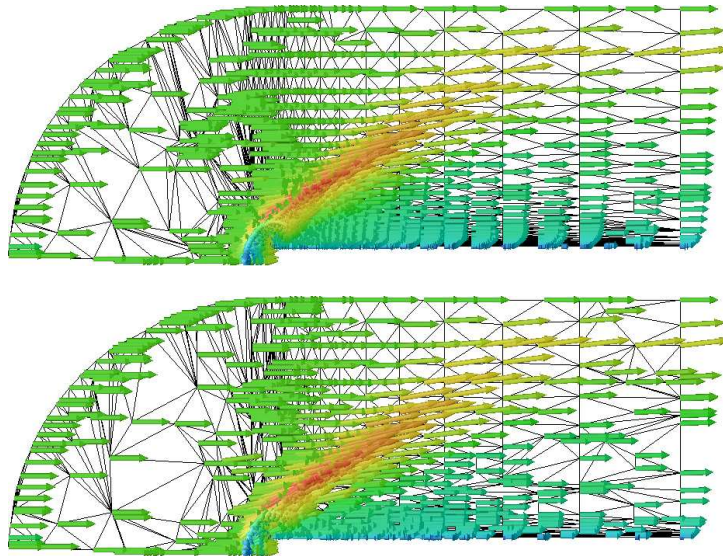
Βαρύτητα: αρχικό μοντέλο και απλοποιημένο στο 50%, 25% και 10% χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση (1) (συρρικνώσεις ημι-ακμών).



— ΣΧΗΜΑ 4.8 —

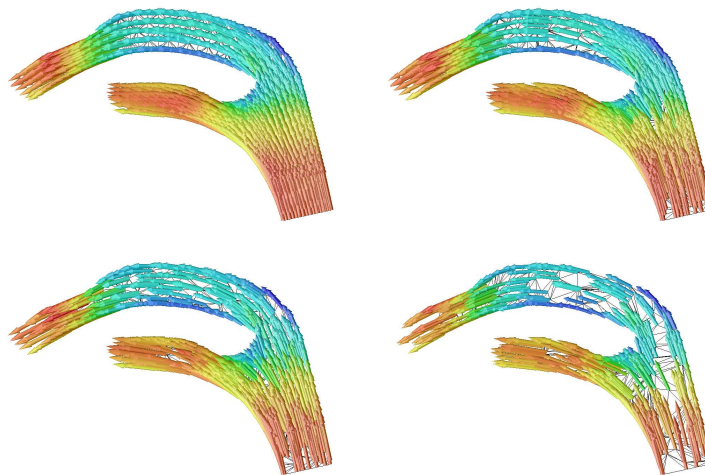
*Bluntfin*: αρχικό μοντέλο και απλοποιημένο στο 50%, 25% και 10% χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση (1) (συρρικνώσεις ημι-ακμών).





— ΣΧΗΜΑ 4.9 —

*Bluntfin*: απλοποιημένο στο 25% και 10% χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση (3) (βελτιστοποίηση νέας κορυφής και τετραγωνικό σφάλμα).



— ΣΧΗΜΑ 4.10 —

*Σωλήνας*: αρχικό μοντέλο και απλοποιημένο στο 50%, 25% και 10% χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση (1) (συρρικνώσεις ημι-ακμών).

Όταν χρησιμοποιείται το σύνθετο σφάλμα, η εύρεση συντελεστών που θα αποδώσουν καλύτερο αποτέλεσμα απλοποίησης είναι γενικά δύσκολη και εξαρτάται από τα μοντέλα. Οι ΠΙΝΑΚΕΣ 4.1–4.3 παρουσιάζουν κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα για τα μοντέλα **βαρύτητα**, **bluntfoot** και **σωλήνας** με τις διαμορφώσεις (1) και (2). Σημειώνονται με πλάγια στοιχεία οι συνδυασμοί παραμέτρων που έδωσαν τα καλύτερα αποτελέσματα για κάθε περίπτωση. Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας  $E_{FL}$  είναι ο πιο αποτελεσματικός, καθώς μπορεί να παραγάγει ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμα και αν χρησιμοποιηθεί μόνος. Οι παράγοντες ελέγχου της ποιότητας του πλέγματος,  $E_C$  και  $E_V$  μπορούν να βελτιώσουν το αποτέλεσμα, με σχετικά χαμηλότερα βάρη. Τέλος, η χρήση των παραγόντων  $E_{FA}$  και  $E_D$  εξαρτάται από το μοντέλο και η χρήση τους χρειάζεται κάποιο πειραματισμό.

Οι ΠΙΝΑΚΕΣ 4.4–4.6 παρουσιάζουν συγκριτικά τις επιδόσεις όλων των διαμορφώσεων του αλγορίθμου απλοποίησης για τα τρία αυτά μοντέλα. Κάθε μοντέλο απλοποιήθηκε στο 50%, 25% και 10% των αρχικών τετραέδρων του, εκτός από το μοντέλο **σωλήνας** που έγινε δυνατό να απλοποιηθεί μέχρι το 15%–20% ανάλογα με τη διαμόρφωση, λόγω κυρίως των περιορισμών για τη διατήρηση του συνόρου του, και για το λόγο αυτό οι αντίστοιχες γραμμές στον πίνακα 4.6 είναι κενές. Τα αποτελέσματα που αναφέρονται για τις διαμορφώσεις (1) και (2) είναι τα καλύτερα που λάβαμε στις δοκιμές μας, όπως φαίνονται στους προηγούμενους ΠΙΝΑΚΕΣ 4.1–4.3. Οι χρόνοι που δίνονται περιλαμβάνουν την πλήρη διαδικασία απλοποίησης, ξεκινώντας από το αρχικό μοντέλο κάθε φορά.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν, κατ' αρχάς, ότι η διαμόρφωση (2), που συνδυάζει τη βελτιστοποιημένη τοποθέτηση της νέας κορυφής με το σύνθετο σφάλμα, δεν αποδίδει καθόλου ικανοποιητικά όσον αφορά τόσο την ταχύτητα της όσο και την ποιότητα του αποτελέσματος. Η επιβράδυνση της απλοποίησης με τη διαμόρφωση αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς υπολογίζονται τόσο το τετραγωνικό σφάλμα, για την τοποθέτηση της κορυφής, όσο και το σύνθετο σφάλμα, για τον υπολογισμό της προτεραιότητας της συρρίκνωσης. Ως προς την ποιότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα ήταν δυνατό αυτή να βελτιωθεί με περισσότερες δοκιμές συνδυασμών βαρών των παραγόντων του σφάλματος.

Η διαμόρφωση (1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η ταχύτητα απλοποίησης είναι το κύριο ζητούμενο, και, με κατάλληλα βάρη στους παράγοντες του σύνθετου σφάλματος, μπορεί να παραγάγει απλοποιημένα πεδία ικανοποιητικής

## — ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1 —

Επίδραση βαρών παραγόντων του σύνθετου σφάλματος, για απλοποίηση του μοντέλου **βαρύτητα** στο 25% των αρχικών τετραέδρων· τα καλύτερα αποτελέσματα σημειώνονται με πλάγια στοιχεία.

$w_{FA}$	$w_{FL}$	$w_D$	$w_C$	$w_V$	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b> — Συρρικνώσεις ημι-ακμών								
10					60,3598	3,1799	45,7937	0,1539
	10				22,2023	2,0851	5,6567	0,0798
	<i>10</i>		<i>0,5</i>	<i>0,5</i>	<i>19,7958</i>	<i>2,0892</i>	<i>1,1433</i>	<i>0,0675</i>
1	10		0,5	0,5	19,7958	2,1312	5,6556	0,0669
<b>Διαμόρφωση (2)</b> — Βέλτιστη τοποθέτηση κορυφής								
10					48,0850	2,6854	25,7437	0,1263
	10				30,6424	2,2220	3,0770	0,0858
	<i>10</i>		<i>0,5</i>	<i>0,5</i>	<i>35,8736</i>	<i>2,0718</i>	<i>2,6067</i>	<i>0,0793</i>
1	10		0,5	0,5	42,4287	2,6063	6,9339	0,1218

## — ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 —

Επίδραση βαρών παραγόντων του σύνθετου σφάλματος, για απλοποίηση του μοντέλου **bluntfin** στο 25% των αρχικών τετραέδρων· τα καλύτερα αποτελέσματα σημειώνονται με πλάγια στοιχεία.

$w_{FA}$	$w_{FL}$	$w_D$	$w_C$	$w_V$	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b> — Συρρικνώσεις ημι-ακμών								
10					15,6074	0,3839	21,0197	1,2166
	10				11,7518	0,3093	923,2150	0,6125
	10		5	5	14,8024	0,2587	8,4035	0,4924
10	10		5	5	15,3043	0,3346	13,2514	0,7290
10	10	10	5	5	14,6855	0,2962	12,7824	0,6143
	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>12,8705</i>	<i>0,2554</i>	<i>11,1031</i>	<i>0,4550</i>
<b>Διαμόρφωση (2)</b> — Βέλτιστη τοποθέτηση κορυφής								
10					174,7850	0,8288	79,8668	3,3599
	10				21,6938	0,3910	29,3575	0,7433
	<i>10</i>		<i>5</i>	<i>5</i>	<i>21,1967</i>	<i>0,3335</i>	<i>16,9359</i>	<i>0,6301</i>
10	10		5	5	28,9305	0,5693	21,4076	1,2156
10	10	10	5	5	19,4967	0,5810	30,3330	1,2395
	10	10	5	5	21,1967	0,3662	21,3324	0,6941

— ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3 —

Επίδραση βαρών παραγόντων του σύνθετου σφάλματος, για απλοποίηση του μοντέλου σωλήνας στο 25% των αρχικών τετραέδρων· τα καλύτερα αποτελέσματα σημειώνονται με πλάγια στοιχεία.

$w_{FA}$	$w_{FL}$	$w_D$	$w_C$	$w_V$	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b> — Συρρικνώσεις ημι-ακμών								
10					50,7635	0,5656	51,7177	1,6452
	10				12,8889	0,6291	40,8704	1,1285
	10		5	5	20,1284	0,5678	32,7031	1,0931
5	10		5	5	22,6138	0,5481	27,8060	1,0679
5	10	5	5	5	16,0302	0,5816	33,5341	1,1970
	10	5	5	5	20,1284	0,5692	32,7031	1,0920
<b>Διαμόρφωση (2)</b> — Βέλτιστη τοποθέτηση κορυφής								
10					11,4757	0,6439	13,4709	1,6342
	10				9,5657	0,5347	12,6326	1,2311
	10		5	5	13,0154	0,8261	20,8675	2,8240
5	10		5	5	13,4159	0,5872	16,1031	1,7560
5	10	5	5	5	13,5923	0,6282	18,8635	2,2499
	10	5	5	5	10,3085	0,7643	17,7690	3,1029

— ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4 —

Αποτελέσματα απλοποίησης για το μοντέλο βαρύτητα σε διάφορες αναλύσεις.

%	χρόνος	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b>					
50	165	19,7958	0,9320	0,9041	0,0221
25	227	19,7958	2,0892	1,1433	0,0675
10	269	36,2294	3,6761	5,6567	0,1977
<b>Διαμόρφωση (2)</b>					
50	390	18,3357	1,1453	0,8004	0,0292
25	647	35,8736	2,0718	2,6067	0,0793
10	744	36,9284	3,6865	7,8716	0,2133
<b>Διαμόρφωση (3)</b>					
50	240	17,8693	1,0028	19,4108	0,0210
25	348	17,8693	2,5084	19,4108	0,0779
10	421	31,5066	4,7867	19,4108	0,2369

— ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5 —

Αποτελέσματα απλοποίησης για το μοντέλο *bluntfin* σε διάφορες αναλύσεις.

%	χρόνος	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b>					
50	316	8,8754	0,1342	8,3856	0,2438
25	431	12,8705	0,2554	11,1031	0,4550
10	502	20,6755	0,4560	15,7483	0,8389
<b>Διαμόρφωση (2)</b>					
50	1004	11,7807	0,2006	12,1109	0,3295
25	1598	21,1967	0,3335	16,9359	0,6301
10	1761	25,7212	0,7232	39,2364	1,3954
<b>Διαμόρφωση (3)</b>					
50	390	7,2315	0,0379	58,145	0,0948
25	562	22,0255	0,1619	58,145	0,3595
10	664	34,8017	0,4889	58,145	0,9519

— ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6 —

Αποτελέσματα απλοποίησης για το μοντέλο *σωλήνας* σε διάφορες αναλύσεις.

%	χρόνος	$\epsilon_A^{max}$	$\epsilon_A^{mean}$	$\epsilon_L^{max}$	$\epsilon_L^{mean}$
<b>Διαμόρφωση (1)</b>					
50	13	6,4064	0,3291	6,7925	0,3617
25	18	22,6138	0,5481	27,8060	1,0679
10	21	67,2400	1,0346	81,3354	2,5356
<b>Διαμόρφωση (2)</b>					
50	23	9,4366	0,3283	8,3492	0,5334
25	30	9,5657	0,5347	12,6326	1,2311
10			—		
<b>Διαμόρφωση (3)</b>					
50	19	6,0357	0,1651	5,5830	0,2245
25	26	11,3945	0,5082	14,6997	1,0023
10			—		



ποιότητας. Δυστυχώς, όπως ήδη αναφέραμε, η επίδραση των παραγόντων αυτών εξαρτάται από τα δεδομένα και έτσι η αυτόματη εφαρμογή της μεθόδου είναι κάπως προβληματική. Οι παρατηρήσεις που έγιναν παραπάνω για τη σχετική επίδρασή τους στα μοντέλα που δοκιμάστηκαν μπορεί να χρησιμεύσει ως οδηγός.

Τέλος, η διαμόρφωση (3), η οποία βελτιστοποιεί τη νέα κορυφή, σε συνδυασμό με το αντίστοιχο της τετραγωνικό σφάλμα για την εκτίμηση του σφάλματος απλοποίησης, παράγει αποτελέσματα πολύ καλής ποιότητας με λογικό χρόνο επεξεργασίας. Σε σχέση με τις άλλες δύο διαμορφώσεις, είναι ακόμα περισσότερο ελκυστική καθώς δεν απαιτεί τον καθορισμό παραμέτρων από το χρήστη (πέρα από τα όρια διατήρησης του συνόρου και των κρίσιμων σημείων, τα οποία είναι ανεξάρτητα από τη μέθοδο απλοποίησης), προσφέροντας έτσι μία εντελώς αυτόματη μέθοδο απλοποίησης των διανυσματικών πεδίων. Έτσι η διαμόρφωση αυτή του αλγορίθμου απλοποίησης επιδεικνύει το δυναμικό του γενικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης που προτείναμε για την απλοποίηση διανυσματικών πεδίων επί τετραεδρικών πλεγμάτων, όταν συνδυαστεί με έναν αποδοτικό αλγόριθμο απλοποίησης τριγωνικών πλεγμάτων κατάλληλα επεκταμένο στις τέσσερις διαστάσεις.

## 4.7 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα της απλοποίησης τετραεδρικών πλεγμάτων με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, με έναν αλγόριθμο που βασίζεται σε διαδοχικές συρρικνώσεις ακμών του πλέγματος. Αναλύσαμε εναλλακτικές υλοποιήσεις του αλγορίθμου, τόσο ως προς την τοποθέτηση της κορυφής που προκύπτει από κάθε συρρίκνωση ακμής, όσο και ως προς την εκτίμηση του σφάλματος που επιφέρει. Ως προς την τοποθέτηση της κορυφής, εξετάσαμε την περίπτωση «στατικής» τοποθέτησής της σε ένα από τα δύο άκρα της ακμής, αλλά και τη βελτιστοποίησή της η οποία λαμβάνει υπ' όψιν τη γεωμετρία του πλέγματος και το εμφυτευμένο πεδίο. Ως προς την εκτίμηση του σφάλματος, εξετάσαμε ένα σύνθετο μέτρο που συνεκτιμά τις αλλαγές στο πλέγμα και στο πεδίο, και το οποίο συνδυάζεται με το στατικό τρόπο τοποθέτησης της κορυφής, αλλά και το μέτρο που αντιστοιχεί στη διαδικασία βελτιστοποίησης που εφαρμόσαμε. Αυτή η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται επεκτείνοντας σε τετραεδρικά

πλέγματα με εμφυτευμένα διανυσματικά πεδία, κατάλληλους αλγορίθμους απλοποίησης επιφανειών, χάρη σε μία γενική μέθοδο που αναπτύξαμε για το σκοπό αυτό. Τέλος, παρουσιάσαμε απλές αλλά αποτελεσματικές τεχνικές διατήρησης του συνόρου του πλέγματος και της τοπολογίας του πεδίου.

Η έρευνα αυτή μπορεί να επεκταθεί και να εμπλουτισθεί προς πολλές κατευθύνσεις.

Κατ' αρχάς ως προς τη διαδικασία βελτιστοποίησης της κορυφής μετά από κάθε συρρίκνωση ακμής, θα ήταν ενδιαφέρον να εξετάσουμε και άλλους αλγορίθμους απλοποίησης επιφανειών, εφαρμόζοντάς τους στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε με τη βοήθεια της γενικής μεθόδου που παρουσιάσαμε· η συμπεριφορά τους αλλά και οι επιδόσεις τους σε αυτό το πλαίσιο θα έχουν οπωσδήποτε ενδιαφέρον.

Επιπλέον, οι τεχνικές που αναπτύξαμε για τη διατήρηση της τοπολογίας των διανυσματικών πεδίων προϋποθέτουν, όπως έχουμε αναφέρει, ότι η τοπολογία τους είναι σχετικά απλή. Οι τεχνικές αυτές πρέπει να εμπλουτισθούν για την επιτυχή απλοποίηση πεδίων με πολλά κρίσιμα σημεία και σύνθετη τοπολογία.

Επίσης, πολλά σύνολα δεδομένων που παρουσιάζονται σε πρακτικές εφαρμογές διαθέτουν πολλαπλά πεδία, βαθμωτά και διανυσματικά, επί του ίδιου τετραεδρικού πλέγματος. Θα ήταν χρήσιμο να προσπαθούσαμε να απλοποιήσουμε τέτοια δεδομένα λαμβάνοντας υπ' όψιν ταυτόχρονα όλα τα πεδία που περιέχουν, ώστε ένα κοινό απλοποιημένο πλέγμα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την οπτικοποίησή τους.

Το πρόβλημα των μεγέθους των απλοποιούμενων πεδίων υπάρχει και στην περίπτωση των τετραεδρικών πεδίων, και μάλιστα σε οξύτερο βαθμό σε σχέση με τα τριγωνικά πλέγματα καθώς εκτός από τη γεωμετρική πληροφορία υπάρχει και η πληροφορία των εμφυτευμένων σε αυτά πεδίων. Για το λόγο αυτό, θα ήταν ενδιαφέρουσα η εξέταση τεχνικών απλοποίησής τους κατά τμήματα και συνένωσης των απλοποιημένων τμημάτων.

Τέλος, στα πλαίσια μίας ολοκληρωμένης αντιμετώπισης της απλοποίησης διανυσματικών πεδίων επί τετραεδρικών πλεγμάτων, θα ήταν χρήσιμη η ανάπτυξη ενός εργαλείου λογισμικού για τη λεπτομερέστερη σύγκριση τέτοιων πεδίων, με δυνατότητες οπτικοποίησης του σφάλματος απλοποίησης.

# 5 Υπολογισμός τομής ακτίνας-τετραέδρου

## 5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της εύρεσης της τομής μεταξύ μιας ακτίνας και ενός τετραέδρου είναι θεμελιώδες για την απεικόνιση και επεξεργασία τετραεδρικών πλεγμάτων, καθώς υπεισέρχεται σε πολλούς σχετικούς αλγορίθμους, όπως παρακολούθηση ακτίνας, φωτοσκίαση όγκου, έλεγχος συγκρούσεων, και άλλους. Σε αυτούς τους αλγορίθμους πολύ μεγάλο μέρος του υπολογιστικού κόστους αποτελούν οι έλεγχοι τομής της ακτίνας με τα τετραέδρα που αποτελούν το πλέγμα, και για το λόγο αυτό η ύπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων για το πρόβλημα αυτό είναι απαραίτητη. Παρόλα αυτά, στην διεθνή βιβλιογραφία δεν συναντώνται εξειδικευμένοι αλγόριθμοι για την εύρεση τομής μεταξύ ακτίνας και τετραέδρου· οι λύσεις που είναι διαθέσιμες αποτελούν ουσιαστικά απλές προσαρμογές γενικότερων αλγορίθμων εύρεσης τομής της ακτίνας με ένα κυρτό πολύεδρο.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε έναν εξειδικευμένο και ιδιαίτερα αποτελεσματικό αλγόριθμο για την εύρεση της τομής μεταξύ μιας ακτίνας και ενός τετραέδρου. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες Plücker για την αναπαράσταση της ακτίνας και του τετραέδρου, χάρη στις οποίες ελαχιστοποιούνται οι απαιτούμενοι υπολογισμοί και επιταχύνεται ο έλεγχος ύπαρξης της τομής. Ο αλγόριθμός μας έχει τα εξής σημαντικά χαρακτηριστικά:

- Αποφαινεται γρήγορα αν υπάρχει ή όχι τομή μεταξύ της ακτίνας και του τετραέδρου.
- Υπολογίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου τομής καθώς και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του ως προς τις τέσσερις κορυφές του τετραέδρου. Οι τελευταίες είναι απαραίτητες σε πολλούς αλγορίθμους που αναζητούν σημεία τομής.

- Μπορεί να εφαρμοστεί με αποτελεσματικότητα για την εύρεση τομής μιας ακτίνας με ένα τετραεδρικό πλέγμα, διότι μπορεί να εκμεταλλευτεί την γειτονικότητα των τετραέδρων του πλέγματος.

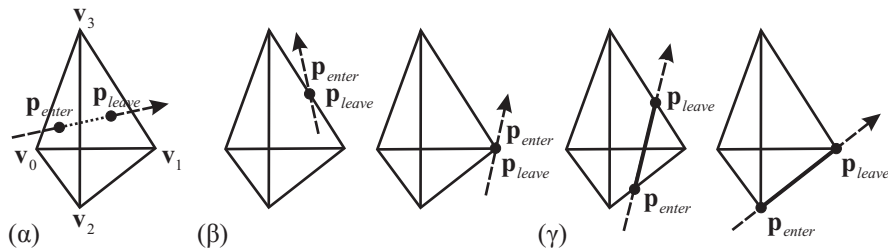
### 5.1.1 Συμβολισμοί

Στους αλγόριθμους που θα περιγράψουμε, θεωρούμε την ακτίνα ως μία ημιευθεία  $r$  καθοριζόμενη από ένα σημείο  $\mathbf{p}$  και διεύθυνση  $\ell$ . Θα αναφερόμαστε σε ένα τετράεδρο  $T(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ , του οποίου οι έδρες είναι, όπως στη σχήση (2.7),

$$\Delta_3(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad \Delta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3), \quad \Delta_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0), \quad \Delta_0(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό  $\Delta_i(\mathbf{v}_0^i, \mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i)$  για να αναφερθούμε στις κορυφές της έδρας  $\Delta_i$ , και ανάλογα για τις ακμές της έδρας  $\Delta_i$ :  $e_0^i(\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i)$ ,  $e_1^i(\mathbf{v}_2^i, \mathbf{v}_0^i)$ ,  $e_2^i(\mathbf{v}_0^i, \mathbf{v}_1^i)$ . Όπως έχουμε αναφέρει και στην παράγραφο 2.1.2, θα υποθέτουμε ότι το τετράεδρο είναι προσανατολισμένο έτσι ώστε το κάθετο διάλυμα στην έδρα  $\Delta_i$  να κατευθύνεται αντίθετα από την κορυφή  $\mathbf{v}_i$ .

Αν η ακτίνα τέμνει το τετράεδρο, γενικά θα υπάρχουν δύο σημεία τομής,  $\mathbf{p}_{enter}$  και  $\mathbf{p}_{leave}$ . Ειδικές περιπτώσεις με ένα ή άπειρα σημεία τομής εμφανίζονται αν η ακτίνα τέμνει μία ή περισσότερες ακμές· αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν ενιαία από τη γενική περίπτωση, όπως φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 5.1, όμως σε κάποιες εφαρμογές είναι χρήσιμο να επισημαίνονται ρητώς.



— ΣΧΗΜΑ 5.1 —

Τομή ακτίνας-τετραέδρου: (α) δύο, (β) ένα, (γ) άπειρα σημεία τομής.

Για τα δύο αυτά σημεία τομής ο αλγόριθμός μας θα υπολογίζει:

- Τις καρτεσιανές συντεταγμένες τους  $\mathbf{p}_{enter}$  και  $\mathbf{p}_{leave}$ .

- Τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες τους  $u_1^{enter}, u_2^{enter}$  και  $u_1^{leave}, u_2^{leave}$  ως προς τις έδρες που τέμνουν,  $\Delta_{enter}$  και  $\Delta_{leave}$  αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\mathbf{p}_k = (1 - u_1^k - u_2^k)\mathbf{v}_0^k + u_1^k\mathbf{v}_1^k + u_2^k\mathbf{v}_2^k \quad \text{για } k = enter, leave.$$

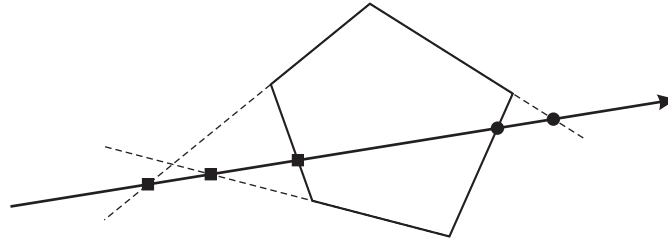
- Τις παραμετρικές αποστάσεις τους  $t_{enter}$  και  $t_{leave}$  από την αρχή της ακτίνας, τέτοιες ώστε

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p} + t_k \ell \quad \text{για } k = enter, leave.$$

## 5.2 Σχετικές εργασίες

Το πρόβλημα της εύρεσης τομής μεταξύ μίας ευθείας και ενός τετραέδρου μπορεί να επιλυθεί, όπως αναφέραμε, από ένα γενικό αλγόριθμο εύρεσης τομής μεταξύ ευθείας και κυρτού πολυέδρου. Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος τέτοιος αλγόριθμος είναι αυτός του Haines [Hai91], ο οποίος εργάζεται με τρόπο ανάλογο του γνωστού αλγορίθμου αποκοπής ευθειών των Liang και Barsky [FvDFH96, ΘΜ99]. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση της ακτίνας, εξετάζει την τομή της με τα επίπεδα που ορίζουν οι έδρες του πολυέδρου και διαχωρίζει αυτά από τα οποία η ακτίνα «εισέρχεται» στο πολύεδρο και αυτά από τα οποία «εξέρχεται» από το πολύεδρο. Το σημείο εισόδου της ακτίνας στο πολύεδρο,  $\mathbf{p}_{enter}$ , προσδιορίζεται ως το πιο απομακρυσμένο μεταξύ των σημείων τομής της με τα επίπεδα «εισόδου», και αντίστοιχα το σημείο εξόδου,  $\mathbf{p}_{leave}$ , ως το πιο κοντινό από τα σημεία τομής της με τα επίπεδα «εξόδου» (βλ. το ΣΧΗΜΑ 5.2 για το διδιάστατο ανάλογο). Ο αλγόριθμος του Haines είναι αρκετά αποτελεσματικός κατά την εξειδίκευσή του για τετράεδρα, και παρακάτω θα τον χρησιμοποιήσουμε ως βάση της αξιολόγησης του αλγορίθμου που αναπτύσσουμε.

Εναλλακτικά, το πρόβλημα που εξετάζουμε μπορεί να αντιμετωπισθεί ελέγχοντας κάθε (τριγωνική) έδρα του τετραέδρου για τομή με την ακτίνα και συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτής της μορφής είναι και ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί αποτελεσματικοί αλγόριθμοι εύρεσης τομής ακτίνας-τριγώνου, και είναι σημαντικό να επιλεγεί κάποιος που ταιριάζει στις απαιτήσεις του προβλήματος. Ο αλγόριθμος των Möller και



— ΣΧΗΜΑ 5.2 —

Δισδιάστατο ανάλογο του αλγορίθμου εύρεσης τομής ακτίνας-κυρτού πολυέδρου του *Haines*. Τα σημεία τομής της ακτίνας με όψεις «εισόδου» σημειώνονται με τετράγωνο, ενώ τα σημεία τομής με όψεις «εξόδου» με κύκλο.

Trumbore [MT97] θεωρείται ένας από τους καλύτερους για τον έλεγχο τομής ακτίνας-τριγώνου, χρησιμοποιεί επίσης την παραμετρική εξίσωση της ακτίνας ενώ συγχρόνως βελτιστοποιεί τον υπολογισμό των βαρυκεντρικών συντεταγμένων των σημείων τομής. Για τους λόγους αυτούς θεωρούμε ότι είναι κατάλληλος για να αποτελέσει τη βάση ενός αλγορίθμου εύρεσης τομής ακτίνας-τετραέδρου. Κατασκευάσαμε μία παραλλαγή του αλγορίθμου μας που τον χρησιμοποιεί αντί για τον έλεγχο τομής με συντεταγμένες Plücker, και την χρησιμοποιούμε επίσης για τη συγκριτική αξιολόγηση του αλγορίθμου μας.

### 5.3 Εύρεση τομής ακτίνας-τριγώνου με χρήση συντεταγμένων Plücker

Στο επίκεντρο του αλγορίθμου εύρεσης τομής ακτίνας-τετραέδρου που θα παρουσιάσουμε βρίσκεται ο αλγόριθμος εύρεσης τομής ακτίνας-τριγώνου που χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες Plücker για την αναπαράσταση της ακτίνας και του τριγώνου. Πρόκειται για έναν εξαιρετικά αποτελεσματικό αλγόριθμο, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις εξέτασης τριγωνικών πλεγμάτων, καθώς οι υπολογισμοί του μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν για γειτονικά τρίγωνα. Για το λόγο αυτό έχει αξιοποιηθεί με επιτυχία στο [AC97] για την επιτάχυνση της παρακολούθησης ακτίνας σε τριγωνικά πλέγματα. Σημειώνουμε επίσης ότι τα παρακάτω έχουν εκφραστεί παλαιότερα με άλλους τρόπους [SF01, YNF90], οι οποίοι αργότερα διαπιστώθηκε ότι είναι ισοδύναμοι με τις συντεταγμένες Plücker [YN97].

### 5.3.1 Συντεταγμένες Plücker

Οι συντεταγμένες Plücker [Eri97, Sho98, Sto91] αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο περιγραφής ημιευθειών στις τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας διανύσματα έξι διαστάσεων. Αν δίνεται μία ημιευθεία  $r$  που καθορίζεται από δύο σημεία της  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{p}$ , με κατεύθυνση από το  $\mathbf{q}$  προς το  $\mathbf{p}$ , οι συντεταγμένες Plücker αυτής είναι το διάνυσμα έξι διαστάσεων

$$\pi_r = \{\mathbf{q} - \mathbf{p} : \mathbf{q} \times \mathbf{p}\} = \{\mathbf{u}_r : \mathbf{w}_r\} \quad (5.1)$$

Ισοδύναμα, αν η ημιευθεία καθορίζεται από τη φορά της  $\ell$  και ένα σημείο  $\mathbf{p}$ , οι συντεταγμένες Plücker αυτής είναι

$$\pi_r = \{\ell : \ell \times \mathbf{p}\} \quad (5.2)$$

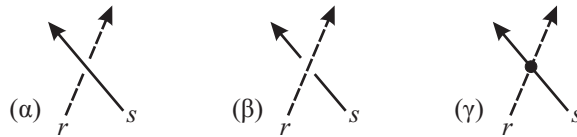
Οι συντεταγμένες αυτές αναπαριστούν την ημιευθεία με τη φορά της  $\ell = \mathbf{q} - \mathbf{p}$  και με ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  και την αρχή των αξόνων. Οι ρίζες των συντεταγμένων Plücker βρίσκονται στις ομογενείς συντεταγμένες, οι οποίες αναπαριστούν ένα τρισδιάστατο σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  με το τετραδιάστατο σημείο  $(x', y', z', w)$ ,  $w \neq 0$ , ώστε  $(x, y, z) = (\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w}, \frac{z'}{w})$ . Οι συντεταγμένες Plücker είναι και οι ίδιες ομογενείς, καθώς αν πολλαπλασιαστούν με μία μη μηδενική θετική σταθερά αναπαριστούν την ίδια ημιευθεία (αλλαγή του προσήμου αντιστρέφει τη φορά της): χάρη σε αυτή τους την ιδιότητα, η αναπαράσταση της ημιευθείας με συντεταγμένες Plücker είναι ανεξάρτητη από το σημείο  $\mathbf{p}$ .

Μεταξύ δύο ημιευθειών που περιγράφονται με συντεταγμένες Plücker ορίζεται το αντιμετατεθημένο εσωτερικό γινόμενο (permuted inner product)

$$\pi_r \odot \pi_s = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{w}_s + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{w}_r \quad (5.3)$$

Το γινόμενο αυτό έχει την ιδιότητα να περιγράφει τον σχετικό προσανατολισμό των δύο ημιευθειών (ΣΧΗΜΑ 5.3):

$$\begin{aligned} \pi_r \odot \pi_s > 0 &\Leftrightarrow \eta \ s \ \sigmaτρέφεται \ αριστερόστροφα \ περί \ την \ r \\ \pi_r \odot \pi_s < 0 &\Leftrightarrow \eta \ s \ \sigmaτρέφεται \ δεξιόστροφα \ περί \ την \ r \\ \pi_r \odot \pi_s = 0 &\Leftrightarrow \eta \ s \ \acute{τ}έμνει \ ή \ είναι \ παράλληλη \ προς \ την \ r \end{aligned}$$



— ΣΧΗΜΑ 5.3 —

Σχετικός προσανατολισμός δύο ημιευθειών: Κοιτάζοντας κατά τη φορά της  $r$ , (α) η  $s$  στρέφεται αριστερόστροφα περί την  $r$ , (β) η  $s$  στρέφεται δεξιόστροφα περί την  $r$ , (γ) η  $s$  τέμνει την  $r$ .

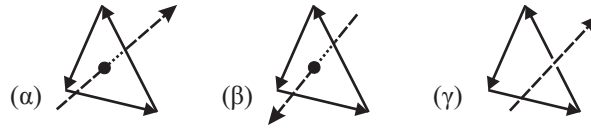
Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτή η ιδιότητα αποτελεί τη βάση για ένα αποτελεσματικό αλγόριθμο ελέγχου ύπαρξης τομής μεταξύ μιας ακτίνας (ημιευθείας) και ενός τριγώνου.

### 5.3.2 Εύρεση τομής ακτίνας-τριγώνου

Υποθέτουμε ότι δίνεται μία ακτίνα  $r$  και ένα τρίγωνο  $\Delta(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Θεωρούμε ότι το τρίγωνο είναι προσανατολισμένο έτσι ώστε, κατά τη συνήθη σύμβαση, το κανονικό του διάνυσμα να δείχνει προς την «εξωτερική» όψη του. Ονομάζουμε τις ακμές του  $e_0(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ,  $e_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0)$  και  $e_2(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ .

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακτίνα τέμνει το τρίγωνο αν και μόνο αν έχει τον ίδιο προσανατολισμό (δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο, σύμφωνα με την έννοια της προηγούμενης παραγράφου) ως προς και τις τρεις ακμές του ή αν τέμνει το πολύ δύο ακμές. Επιπλέον, στην περίπτωση ύπαρξης τομής, ο (κοινός) προσανατολισμός της ακτίνας ως προς τις ακμές του τριγώνου δείχνει τη φορά της ακτίνας (εισερχόμενη ή εξερχόμενη) ως προς το τρίγωνο. Το ΣΧΗΜΑ 5.4 απεικονίζει τις πιο γενικές περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι αν η ακτίνα τέμνει και τις τρεις ακμές, τότε είναι συνεπίπεδη με το τρίγωνο· αν τέμνει μόνο δύο ακμές, διερχόμενη από κάποια κορυφή, τότε ο προσανατολισμός της ως προς την τρίτη ακμή δείχνει τη φορά της ως προς το τρίγωνο· αν, τέλος, τέμνει μόνο μία ακμή, θα έχει τον ίδιο προσανατολισμό ως προς τις δύο υπόλοιπες ακμές.





— ΣΧΗΜΑ 5.4 —

(α) Η ακτίνα εισέρχεται στο τρίγωνο (β) Η ακτίνα εξέρχεται από το τρίγωνο (γ) Η ακτίνα και το τρίγωνο δεν τέμνονται.

Συνοπτικά, ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
 \eta \ r \ \text{τέμνει (εισερχόμενη) το } \Delta &\Leftrightarrow \pi_r \odot \pi_{e_i} \geq 0 \ \forall i \ \wedge \ \exists j : \pi_r \odot \pi_{e_j} \neq 0 \\
 \eta \ r \ \text{τέμνει (εξερχόμενη) το } \Delta &\Leftrightarrow \pi_r \odot \pi_{e_i} \leq 0 \ \forall i \ \wedge \ \exists j : \pi_r \odot \pi_{e_j} \neq 0 \\
 \eta \ r \ \text{είναι συνεπίπεδη με το } \Delta &\Leftrightarrow \pi_r \odot \pi_{e_i} = 0 \ \forall i
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Αυτός ο αλγόριθμος ελέγχου της τομής μεταξύ μιας ακτίνας και ενός τριγώνου εμφανίζει πολλά επιθυμητά χαρακτηριστικά, άμεσα αξιοποιήσιμα στις εφαρμογές του:

- Είναι ευσταθής και αποτελεσματικός, καθώς απαιτεί λίγες πράξεις κινητής υποδιαστολής, καμία διαίρεση και βασίζεται αποκλειστικά σε συγκρίσεις προσήμων.
- Είναι ιδιαίτερα κατάλληλος για την επεξεργασία τριγωνικών πλεγμάτων: για κάθε εσωτερική ακμή ο υπολογισμός του γινομένου αρκεί να γίνει μόνο μία φορά και για τα δύο τρίγωνα εκατέρωθεν αυτής, και απλώς πρέπει να πάρει το κατάλληλο πρόσημο ανάλογα με τη φορά της ακμής σε καθένα από τα δύο τρίγωνα: παρατηρώντας το ΣΧΗΜΑ 2.4, το τρίγωνο  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  περιέχει την ακμή  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ , ενώ το  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3)$  περιέχει την  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0)$ , και ισχύει

$$\pi_r \odot \pi_{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)} = -(\pi_r \odot \pi_{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0)})$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (5.1) και (5.3).

- Τέλος, αν η ακτίνα και το τρίγωνο δεν είναι συνεπίπεδα, τα αντιμετατεθημένα εσωτερικά γινόμενα  $\pi_r \odot \pi_{e_i}$  παρέχουν άμεσα τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου τομής  $\mathbf{p}_k$  ως προς τις κορυφές  $\mathbf{v}_i$ , εκτός μίας

αλλαγής κλίμακας ώστε να αθροίζονται στη μονάδα. Η απόδειξη παρέχεται στο [Jon00] αλλά είναι πέρα από τους σκοπούς της παρουσίασης. Έτσι θέτοντας

$$w_i^k = \pi_r \odot \pi_{e_i}, \quad (5.5\alpha)$$

οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου τομής θα είναι

$$u_i^k = w_i^k / \sum_{i=0}^2 w_i^k. \quad (5.5\beta)$$

Κατόπιν οι καρτεσιανές συντεταγμένες του μπορούν να υπολογιστούν ως

$$\mathbf{p}_k = u_0^k \mathbf{v}_0 + u_1^k \mathbf{v}_1 + u_2^k \mathbf{v}_2,$$

και η παραμετρική του απόσταση από την αρχή της ακτίνας μπορεί να υπολογιστεί επιλύοντας ως προς  $t_k$  μία συντεταγμένη της εξίσωσης  $\mathbf{p}_k = \mathbf{p} + t_k \ell$  για την οποία η  $\ell$  είναι μη μηδενική.

## 5.4 Εύρεση τομής ακτίνας-τετραέδρου με χρήση συντεταγμένων Plücker

### 5.4.1 Βασικός αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος εύρεσης τομής ακτίνας-τριγώνου που περιγράψαμε οδηγεί σε έναν αλγόριθμο εύρεσης της τομής μεταξύ μιας ακτίνας και ενός τετραέδρου.

Στα επόμενα, αναφερόμενοι στην έδρα  $\Delta_i$  του τετραέδρου, θα σημειώνουμε ως  $\pi_j^i$  τις συντεταγμένες Plücker της ακμής  $e_j^i$  και ως  $\sigma_j^i$  το πρόσημο του αντιμετατεθημένου εσωτερικού γινομένου  $\pi_r \odot \pi_j^i$  για δεδομένη ακτίνα  $r$ :

$$\sigma_j^i = \text{sign}(\pi_r \odot \pi_j^i) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \pi_r \odot \pi_j^i > 0 \\ 0, & \text{εάν } \pi_r \odot \pi_j^i = 0 \\ -1, & \text{εάν } \pi_r \odot \pi_j^i < 0 \end{cases}$$

## — ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5.1 —

Βασικός αλγόριθμος εύρεσης τομής ακτίνας-τετραέδρου.

---

```

 $\Delta_{enter} = nil$ 
 $\Delta_{leave} = nil$ 
for  $i = 3, 2, 1, 0$  do
  Υπολόγισε τα  $\sigma_0^i, \sigma_1^i$  και  $\sigma_2^i$ 
  if  $((\sigma_0^i \neq 0) \vee (\sigma_1^i \neq 0) \vee (\sigma_2^i \neq 0))$ 
    if  $((\Delta_{enter} == nil) \wedge (\sigma_0^i \geq 0) \wedge (\sigma_1^i \geq 0) \wedge (\sigma_2^i \geq 0))$ 
       $\Delta_{enter} = \Delta_i$ 
    else if  $((\Delta_{leave} == nil) \wedge (\sigma_0^i \leq 0) \wedge (\sigma_1^i \leq 0) \wedge (\sigma_2^i \leq 0))$ 
       $\Delta_{leave} = \Delta_i$ 
    end if
  end if
end for

```

---

Ο αλγόριθμος εξετάζει διαδοχικά κάθε έδρα του τετραέδρου και αποφαινεται αν είναι η έδρα εισόδου ( $\Delta_{enter}$ ) ή εξόδου ( $\Delta_{leave}$ ) της ακτίνας, σύμφωνα με τη σχέση (5.4): αν μία από αυτές βρεθεί, οι αντίστοιχοι έλεγχοι προσήμου δεν χρειάζεται να γίνουν για τις υπόλοιπες έδρες. Η διαδικασία περιγράφεται στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 5.1.

Όπως συνάγεται από τα σχόλια της προηγούμενης παραγράφου, αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να υπολογίσει τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες των σημείων τομής με λίγες επιπρόσθετες πράξεις, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.5). Μπορεί επίσης να επισημάνει εξαρχής τις ειδικές περιπτώσεις τομής του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 5.1(β,γ), κατά τις οποίες μερικά από τα  $\sigma_j^i$  είναι μηδενικά.

#### 5.4.2 Βελτιστοποιήσεις με απλές τροποποιήσεις του αλγορίθμου

Ο βασικός αλγόριθμος που παρουσιάσαμε μπορεί να βελτιστοποιηθεί σε πολλά σημεία, ανάλογα και με την εφαρμογή που αντιμετωπίζει. Κάποιες πρώτες, απλές βελτιστοποιήσεις που δεν απαιτούν σημαντικές τροποποιήσεις του αλγορίθμου, είναι δυνατές αν αναλυθεί ο βασικός βρόχος **for** και οι διαδοχικοί έλεγχοι τροποποιηθούν ως εξής:

- Μόλις βρεθούν οι  $\Delta_{enter}$  και  $\Delta_{leave}$ , ο αλγόριθμος μπορεί να τερματιστεί.
- Οι έλεγχοι αρκεί να πραγματοποιηθούν το πολύ για τρεις από τις τέσσερις έδρες του τετραέδρου. Αν καμία από τις τρεις έδρες δεν τέμνεται από την ακτίνα, τότε ούτε η τέταρτη τέμνεται· διαφορετικά η τέταρτη έδρα θα είναι η  $\Delta_{enter}$  ή η  $\Delta_{leave}$ , ανάλογα με το ποια από τις δύο δεν έχει ήδη βρεθεί.
- Οι υπολογισμοί των αντιμετατεθημένων εσωτερικών γινομένων μπορούν να γίνουν μόνο μία φορά για τις δύο έδρες του τετραέδρου που μοιράζονται κάθε ακμή, αντίστοιχα με την περιγραφή που κάναμε παραπάνω για τα τριγωνικά πλέγματα.

Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να αποδειχθεί ακόμη πιο σημαντικό κατά την επεξεργασία τετραεδρικών πλεγμάτων: στην περίπτωση αυτή κάθε εσωτερική ακμή χρησιμοποιείται, με κατάλληλη φορά, από πολλά τετράεδρα· έτσι, με χρήση κατάλληλων δομών δεδομένων αποθήκευσης του τετραεδρικού πλέγματος, το γινόμενο της κάθε ακμής με την ακτίνα μπορεί να υπολογιστεί μόνο την πρώτη φορά που θα χρειαστεί και να επαναχρησιμοποιηθεί, με το κατάλληλο πρόσημο, για όλα τα γειτονικά τετράεδρα.

### 5.4.3 Θεμελιώδεις βελτιστοποιήσεις

Επιπλέον βελτιστοποιήσεις του αλγορίθμου είναι δυνατές με αύξηση της πολυπλοκότητας του κώδικα. Σκοπός μας είναι η χρήση της ελάχιστης δυνατής πληροφορίας ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει τομή μεταξύ της ακτίνας και μιας έδρας του τετραέδρου.

- Παρατηρούμε ότι ο βασικός έλεγχος του αλγορίθμου εξετάζει όλα τα πρόσημα  $\sigma_j^i$  ταυτόχρονα· όμως αν δύο από αυτά δεν συμφωνούν, το τρίτο δεν χρειάζεται να εξεταστεί καθόλου και ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντεταγμένων Plücker καθώς και του αντιμετατεθημένου εσωτερικού γινομένου μπορεί να αποφευχθεί εντελώς. Χρειάζεται να προσεχθεί το γεγονός ότι οποιαδήποτε δύο (αλλά όχι και τα τρία)  $\sigma_j^i$  μπορεί να είναι μηδενικά όταν υπάρχει τομή. Κατόπιν αυτών, ο βασικός έλεγχος μπορεί να γίνει όπως φαίνεται στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 5.2.

## — ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5.2 —

Βελτιστοποιημένος έλεγχος τομής ακτίνας με έδρα τετραέδρου.

---

```

Υπολόγισε τα  $\sigma_0^i$  και  $\sigma_1^i$ 
if  $((\sigma_0^i == \sigma_1^i) \vee (\sigma_0^i == 0) \vee (\sigma_1^i == 0))$ 
  Υπολόγισε το  $\sigma_2^i$ 
   $\sigma^i = \sigma_0^i$  {Υπολόγισε το πρόσημο  $\sigma^i$  (προσανατολισμό) της έδρας  $i$ }
  if  $(\sigma^i == 0)$ 
     $\sigma^i = \sigma_1^i$ 
    if  $(\sigma^i == 0)$ 
       $\sigma^i = \sigma_2^i$ 
    end if
  end if
  if  $((\sigma^i \neq 0) \wedge ((\sigma_2^i == \sigma^i) \vee (\sigma_2^i == 0)))$ 
    if  $(\sigma^i > 0)$ 
       $\Delta_{enter} = \Delta_i$ 
    else
       $\Delta_{leave} = \Delta_i$ 
    end if
  end if
end if

```

---

- Όταν βρεθεί μία έδρα που τέμνεται από την ακτίνα, ο έλεγχος μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά για τις υπόλοιπες έδρες του τετραέδρου. Συγκεκριμένα, το πρόσημο  $\sigma_j^i$  για τις ακμές τους που ανήκουν και στην τεμνόμενη έδρα θα είναι το απαιτούμενο για τυχόν ύπαρξη τομής και δεν χρειάζεται να ελεγχθεί ξανά. Επιπλέον, για τις υπόλοιπες ακμές το  $\sigma_j^i$  θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση  $\sigma_j^i \leq 0$  αν η  $\Delta_{leave}$  δεν έχει βρεθεί ή τη σχέση  $\sigma_j^i \geq 0$  αν η  $\Delta_{enter}$  δεν έχει βρεθεί.
- Όταν βρεθεί μία έδρα που τέμνεται από την ακτίνα και απομένουν μόνο δύο έδρες που δεν έχουν ελεγχθεί, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η άλλη τεμνόμενη έδρα ελέγχοντας μόνο το πρόσημο της κοινής τους ακμής. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μένει να προσδιοριστεί η  $\Delta_{leave}$  μεταξύ των  $\Delta_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0)$  και  $\Delta_0(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$ . αν  $\pi_r \odot \pi_{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} < 0$ , τότε  $\Delta_{leave} = \Delta_1$ , διαφορετικά  $\Delta_{leave} = \Delta_0$  (εκτός και αν όλα τα  $\sigma_j^0$  είναι μηδενικά, οπότε επίσης  $\Delta_{leave} = \Delta_1$ ).

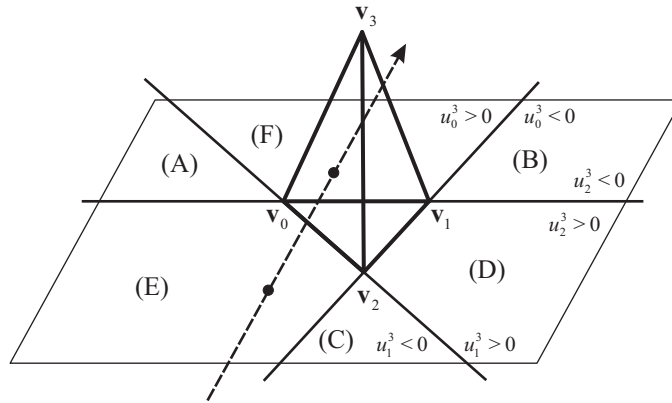
Οι δύο τελευταίες βελτιστοποιήσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν γίνεται επεξεργασία ενός τετραεδρικού πλέγματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις βρεθεί ένα τετράεδρο που τέμνεται από την ακτίνα, η πληροφορία γειτνίασης των τετραέδρων του πλέγματος παρέχει άμεσα το επόμενο τετράεδρο που τέμνεται από την ακτίνα και η  $\Delta_{enter}$  είναι ήδη γνωστή για αυτό (Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού του επόμενου τετράεδρου δεν ισχύει αν η ακτίνα εγκαταλείπει το προηγούμενο τετράεδρο τέμνοντας μία ακμή του).

#### 5.4.4 Εξετάζοντας τη γεωμετρία του προβλήματος

Κατά τη διερεύνηση του προβλήματος της εύρεσης τομής μεταξύ ακτίνας και τετράεδρου, διαπιστώσαμε την ακόλουθη γεωμετρική ιδιότητα του προβλήματος αυτού και την εξετάσαμε ως ένα πιθανώς αποτελεσματικό μέσο για την επιτάχυνση του αλγορίθμου. Όμως για τους λόγους που θα αναλύσουμε παρακάτω, στην πράξη δεν επιταχύνει την πλήρως βελτιστοποιημένη μορφή του αλγορίθμου· την αναφέρουμε εδώ για πληρότητα, καθώς πιστεύουμε ότι παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Έστω ότι ελέγχουμε κατ' αρχάς αν η ακτίνα τέμνει την έδρα  $\Delta_3 (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Αν αυτό συμβαίνει, ο αλγόριθμος συνεχίζει όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Αν όχι, η ακτίνα τέμνει το επίπεδο που ορίζει η  $\Delta_3$  μέσα σε μία από τις έξι περιοχές που ορίζουν οι ευθείες κατά μήκος των ακμών της  $\Delta_3$  (ΣΧΗΜΑ 5.5)· με μαθηματικούς όρους, αυτές οι περιοχές αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιοχές τιμών των βαρυκεντρικών συντεταγμένων του σημείου τομής πάνω στο επίπεδο ως προς τις  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι ανάλογα με την περιοχή τομής και την κατεύθυνση της ακτίνας (εισερχόμενη ή εξερχόμενη) ως προς το επίπεδο, η ακτίνα είναι δυνατό να εισέρχεται στο τετράεδρο ή να εξέρχεται από αυτό μόνο από μία συγκεκριμένη έδρα από τις υπόλοιπες τρεις. Για παράδειγμα, αν εισέρχεται στο επίπεδο στην περιοχή (E), μπορεί να εισέρχεται στο τετράεδρο μόνο από την  $\Delta_1 (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0)$ , ενώ αν «εισέρχεται» στο επίπεδο στην περιοχή (A), μπορεί να εξέρχεται από το τετράεδρο μόνο από την  $\Delta_0 (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$ . Σημειώνουμε εδώ ότι η ακτίνα «εισέρχεται» στο επίπεδο αν  $\sum_{j=0}^2 (\pi_r \odot \pi_j^3) > 0$ , καθώς είναι εύκολο ναδειχθεί ότι αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με τον συνήθη έλεγχο  $\ell \cdot \mathbf{n} < 0$  όπου  $\mathbf{n}$  είναι κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο της  $\Delta_3$  (πρβλ. τη σχέση (2.4)).

Με τα δεδομένα αυτά μπορούμε να κατευθύνουμε τον αλγόριθμο ως προς



— ΣΧΗΜΑ 5.5 —

Αν μία ακτίνα δεν τέμνει την  $\Delta_3(v_0, v_1, v_2)$ , τέμνει το επίπεδο που αυτή ορίζει σε μία από τις έξι περιοχές (A–F) που φαίνονται.

την επόμενη έδρα που πρέπει να εξετάσει και ως προς το πρόσημο που πρέπει να έχουν τα  $\sigma_j^i$  αυτής. Αν κάποιο πρόσημο δεν συμφωνεί, τότε δεν θα υπάρχει καθόλου τομή της ακτίνας με το τετράεδρο και ο αλγόριθμος μπορεί να τερματισθεί.

Παρόλα αυτά, στην πράξη το σχήμα αυτό δεν επιταχύνει τον πλήρως βελτιστοποιημένο αλγόριθμο της παραγράφου 5.4.3, και αυτό μπορεί να αποδοθεί στους εξής δύο παράγοντες: κατ' αρχάς, για να εφαρμοστεί η παραπάνω τεχνική πρέπει να γίνει ο υπολογισμός όλων των γινομένων  $\pi_r \odot \pi_j^3$ ,  $j = 0, 1, 2$ , ενώ πιθανώς ένας από αυτούς μπορεί να αποφευχθεί, όπως αναλύσαμε παραπάνω· επίσης ο καθορισμός της περιοχής τομής (A–F) της ακτίνας με το επίπεδο απαιτεί μία αρκετά πολύπλοκη εξέταση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων, με μια σειρά εγκιβωτισμένων ελέγχων που δεν είναι αποδοτική.

## 5.5 Αποτελέσματα

Οι αλγόριθμοι που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο αυτό δοκιμάστηκαν σε τυχαία ζεύγη ακτίνων και τετραέδρων. Με τη χρήση ειδικού βοηθητικού προγράμματος κατασκευάστηκαν σύνολα αποτελούμενα το καθένα από 10.000 ζεύγη ακτίνων-τετραέδρων, με αυξανόμενο ποσοστό τεμνόμενων ζευγών για κάθε

σύνολο, από 0% ως 100%. Θελήσαμε με τον τρόπο αυτό να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα των αλγορίθμων όταν διαφορετικά ποσοστά τομών παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή τους. Συγκρίναμε τους εξής αλγορίθμους:

- Τις τρεις παραλλαγές του αλγορίθμου μας με χρήση συντεταγμένων Plücker που αντιστοιχούν στις παραγράφους 5.4.2, 5.4.3 και 5.4.4 (στα σχήματα που ακολουθούν αναφέρονται αντίστοιχα ως Plücker1, Plücker2 και Plücker3).
- Τον αλγόριθμο του Haines όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 5.2, ως έναν γενικότερο αλλά πολύ αποτελεσματικό αλγόριθμο· για τις δοκιμές μας τον προσαρμόσαμε και τον βελτιστοποιήσαμε κατάλληλα για την αντιμετώπιση τετραέδρων.
- Έναν αλγόριθμο ανάλογο με τον πλήρως βελτιστοποιημένο αλγόριθμό μας της παραγράφου 5.4.3 αλλά που χρησιμοποιεί τον έλεγχο τομής ακτίνας-τριγώνου των Möller και Trumbore· θελήσαμε έτσι να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα του ελέγχου τομής ακτίνας-τριγώνου με συντεταγμένες Plücker στα πλαίσια του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε.

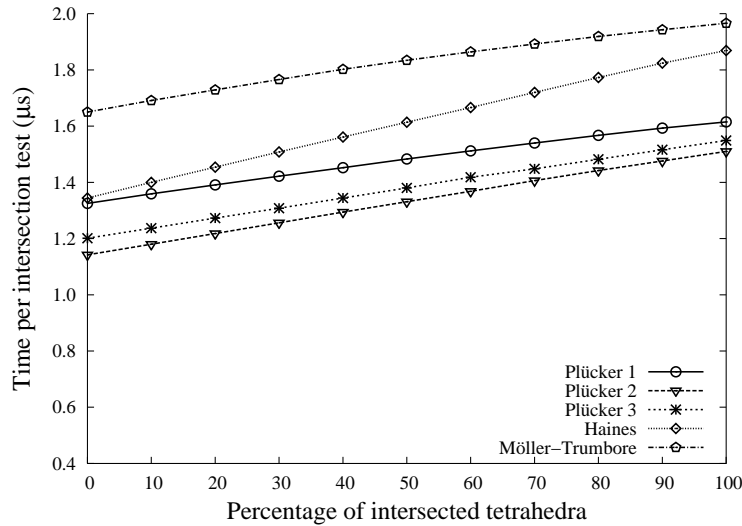
Όλοι οι αλγόριθμοι παράγουν, αν υπάρχει τομή, τις τεμνόμενες έδρες  $\Delta_{enter}$  και  $\Delta_{leave}$ , καθώς και τις καρτεσιανές, βαρυκεντρικές και παραμετρικές συντεταγμένες των σημείων τομής σύμφωνα με την παράγραφο 5.1.1.

Οι δοκιμές μας πραγματοποιήθηκαν σε προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Intel Celeron στα 900MHz με λειτουργικό σύστημα Linux.

Τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στο ΣΧΗΜΑ 5.6. Όπως είναι φανερό, οι αλγόριθμοί μας που χρησιμοποιούν τις συντεταγμένες Plücker αποδίδουν καλύτερα από τους υπόλοιπους αλγορίθμους σε όλες τις περιπτώσεις. Οι βελτιστοποιήσεις της παραγράφου 5.4.3 προσδίδουν σημαντική αύξηση της επίδοσης του αλγορίθμου, ενώ οι τροποποιήσεις της παραγράφου 5.4.4 έχουν αρνητικό αντίκτυπο, όπως ήδη σημειώσαμε.

Σχετικά με τους άλλους δύο αλγορίθμους, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος του Haines αποδίδει συγκριτικά καλύτερα όταν το ποσοστό τεμνόμενων ζευγών είναι μικρό· αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να αποφανθεί ότι δεν υπάρχει τομή χωρίς να εξετάσει όλες τις έδρες του τετραέδρου, ενώ αντίθετα πρέπει να τις εξετάσει όλες για να υπολογίσει τα σημεία



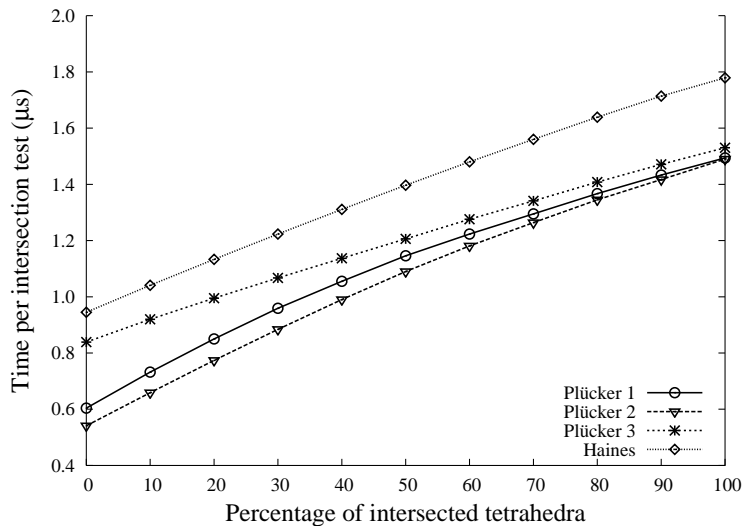


— ΣΧΗΜΑ 5.6 —

Επιδόσεις αλγορίθμων ελέγχου τομής ακτίνας-τετραέδρου.

τομής όταν υπάρχουν. Παρατηρούμε, τέλος, ότι ο αλγόριθμος που ενσωματώνει τον έλεγχο τομής ακτίνας-τριγώνου των Möller και Trumbore, ο οποίος θεωρείται από τους πιο αποτελεσματικούς τέτοιους ελέγχους, αποδίδει χειρότερα από τον αντίστοιχο αλγόριθμο που χρησιμοποιεί τον έλεγχο με συντεταγμένες Plücker που προτείνουμε: αυτό αποδεικνύει την καταλληλότητα του τελευταίου για το πρόβλημα που εξετάζουμε καθώς και την αποτελεσματικότητα των βελτιστοποιήσεων που εφαρμόσαμε κατά την ενσωμάτωσή του στον αλγόριθμό μας.

Οι αλγόριθμοι που συγκρίνουμε τροποποιήθηκαν ώστε οι υπολογισμοί που αφορούν σε μία συγκεκριμένη ακτίνα να πραγματοποιούνται στην αρχή και να μην προσμετρώνται στο χρόνο που αναφέρεται. Προσπαθήσαμε έτσι να προσεγγίσουμε εργασίες όπως η παρακολούθηση ακτίνας σε ένα τετραεδρικό πλέγμα όπου τέτοιοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν μία φορά και να επαναχρησιμοποιηθούν για γειτονικά τετραέδρα, με τον τρόπο που έχουμε ήδη αναφέρει. Οι ποσότητες που προϋπολογίσαμε για τους δικούς μας αλγόριθμους είναι τα  $\pi_r \odot \pi_j^i$  και  $\sigma_j^i$  για όλα τα  $i, j$ , και αντίστοιχες για τον αλγόριθμο του Haines: ο αλγόριθμος με τη δοκιμή των Möller και Trumbore δεν είναι κατάλληλος για την



— ΣΧΗΜΑ 5.7 —

Επιδόσεις αλγορίθμων ελέγχου τομής ακτίνας-τετραέδρου με προϋπολογισμένες ποσότητες.

περίπτωση αυτή, καθώς θα απαιτούσε την αποθήκευση πολλών προϋπολογισμένων ποσοτήτων, και έτσι δεν περιλήφθηκε σε αυτές τις μετρήσεις.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο ΣΧΗΜΑ 5.7. Παρατηρούμε ότι είναι απολύτως συνεπή με τα προηγούμενα και επιβεβαιώνουν το δυναμικό των αλγορίθμων που αναπτύξαμε. Σε κάθε περίπτωση, ο πλήρως βελτιστοποιημένος αλγόριθμος που προτείνουμε είναι ο ταχύτερος.

## 5.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο υπολογισμού των σημείων τομής μεταξύ μίας ακτίνας και ενός τετραέδρου, τον πρώτο που παρουσιάζεται ειδικά για αυτό το πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες Plücker για την αναπαράσταση της ακτίνας και του τετραέδρου, οι απαιτούμενες αριθμητικές πράξεις μειώνονται και απλοποιούνται, ενώ μία σειρά από βελτιστοποιήσεις αυξάνει σημαντικά τις επιδόσεις του αλγορίθμου, κάνοντάς τες σε κάθε περίπτωση καλύτερες από αυτές άλλων αλγορίθμων που

μπορούν να αντιμετωπίσουν το ίδιο πρόβλημα.

Ο αλγόριθμος αυτός αναμένουμε να χρησιμοποιηθεί σε πολλές εφαρμογές οπτικοποίησης και επεξεργασίας τετραεδρικών πλεγμάτων, καθώς ο έλεγχος τομής ευθείας-τετραέδρου αποτελεί κύριο συστατικό στοιχείο πολλών σχετικών αλγορίθμων των Γραφικών. Επιπλέον, όπως έχουμε αναφέρει, η δομή του αλγορίθμου τον κάνει κατάλληλο για την επεξεργασία τετραεδρικών πλεγμάτων, με εκμετάλλευση της γειτνίασης των τετραέδρων.

Μελλοντική σχετική έρευνά μας θα εκμεταλλευτεί αυτό το χαρακτηριστικό του αλγορίθμου για την πραγματοποίηση ελέγχων τομής με προοδευτικά τετραεδρικά πλέγματα, όπως αυτά που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε συνδυασμό με την επιλεκτική εκλέπτυνση των προοδευτικών πλεγμάτων, αναμένουμε να αναπτύξουμε αποτελεσματικούς αλγορίθμους για την οπτικοποίηση και την επεξεργασία τους.

Τέλος, οι τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο για τον έλεγχο τομής μεταξύ ακτίνας και τετραέδρου μπορούν να επεκταθούν για την ανάπτυξη ανάλογων αλγορίθμων ελέγχου τομής μεταξύ τριγώνου και τετραέδρου ή δύο τετραέδρων. Τέτοιοι αλγόριθμοι είναι απαραίτητοι σε διαδικασίες ελέγχου συγκρούσεων μεταξύ επιφανειών και όγκων, οι οποίες συναντώνται σε πολλές σύγχρονες εφαρμογές.



## Βιβλιογραφία

- [AC97] JOHN AMANATIDES και KIN CHOI, *Ray Tracing Triangular Meshes*. Στο *Proceedings of the Eighth Western Computer Graphics Symposium*, σελίδες 43–52, Απρίλιος 1997.
- [AS96] MARIA-ELENA ALGORRI και FRANCIS SCHMITT, *Mesh Simplification*. *Computer Graphics Forum*, 15(3):77–86, 1996.
- [BA88] ROD BOGART και JEFF ARENBERG, *Ray/Triangle Intersection with Barycentric Coordinates*. *Ray Tracing News*, 1(11), Νοέμβριος 1988. <http://www.acm.org/tog/resources/RTNews/html/rtnews5b.html#art3>.
- [BKSS90] NORBERT BECKMANN, HANS-PETER KRIEGEL, RALF SCHNEIDER και BERNHARD SEEGER, *The R\*-tree: an efficient and robust access method for points and rectangles*. Στο *Proceedings of SIGMOD '90*, σελίδες 322–331, 1990.
- [BS96] CHANDRAJIT L. BAJAJ και DANIEL R. SCHIKORE, *Error bounded reduction of triangle meshes with multivariate data*. *SPIE*, 2656:34–45, 1996.
- [CCM<sup>+</sup>00] PAOLO CIGNONI, D. CONSTANZA, CLAUDIO MONTANI, CLAUDIO ROCCHINI και ROBERTO SCOPIGNO, *Simplification of Tetrahedral Meshes with Accurate Error Evaluation*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization 2000*, σελίδες 85–92, 2000.
- [CCMS97] ANDREA CIAMPALINI, PAOLO CIGNONI, CLAUDIO MONTANI και ROBERTO SCOPIGNO, *Multiresolution decimation based on global error*. *The Visual Computer*, 13(5):228–246, 1997.
- [CL03] YI-JEN CHIANG και XIANG LU, *Progressive Simplification of Tetrahedral Meshes Preserving All Isosurface Topologies*. *Computer Graphics Forum*, 22(3):493–504, 2003.

- [Cla76] JAMES H. CLARK, *Hierarchical Geometric Models for Visible Surface Algorithms*. Communications of the ACM, 19(10):547–554, Οκτώβριος 1976.
- [CLR90] THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON και RONALD L. RIVEST, *Introduction to Algorithms*. MIT Press, πρώτη έκδοση, 1990.
- [CM02] PRASHANT CHOPRA και JOERG MEYER, *Tetfusion: An algorithm for rapid tetrahedral mesh simplification*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization 2002*, σελίδες 133–140, 2002.
- [CMS98] PAOLO CIGNONI, CLAUDIO MONTANI και ROBERTO SCOPIGNO, *Tetrahedra Based Volume Visualization*. Στο HANS-CHRISTIAN HEGE και KONRAD POLTHIER (εκδότες), *Mathematical Visualization: Algorithms, Applications, and Numerics*, σελίδες 3–18. Springer-Verlag, 1998.
- [CP89] BERNARD CHAZELLE και LEONIDAS PALIOS, *Triangulating a Nonconvex Polytope*. Discrete and Computational Geometry, 5:505–526, 1989.
- [CRS98] PAOLO CIGNONI, CLAUDIO ROCCINI και ROBERTO SCOPIGNO, *Metro: Measuring Error on Simplified Surfaces*. Computer Graphics Forum, 17(2):167–174, 1998.
- [CS97] SWEN CAMPAGNA και HANS-PETER SEIDEL, *Generating and Displaying Progressive Meshes*. Στο *Proceedings of 3D Image Analysis and Synthesis '97*, σελίδες 35–42, 1997.
- [CVM<sup>+</sup>96] JONATHAN COHEN, AMITABH VARSHNEY, DINESH MANOCHA, GREG TURK, HANS WEBER, PANKAJ AGARWAL, FREDERICK BROOKS και WILLIAM WRIGHT, *Simplification Envelopes*. Στο *SIGGRAPH '96 Conference Proceedings*, σελίδες 119–128, 1996.
- [DEGN99] TAMAL K. DEY, HERBERT EDELSBRUNNER, SUMANTA GUHA και DMITRY V. NEKHAYEV, *Topology Preserving Edge Contraction*. Publications de l'Institut Mathématique (Beograd), 66(80):23–45, 1999.
- [DFMP97] LEILA DE FLORIANI, PAOLA MAGILLO και ENRICO PUPPO, *Building and Traversing a Surface at Variable Resolution*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '97*, σελίδες 103–110, 1997.
- [DFMP98] LEILA DE FLORIANI, PAOLA MAGILLO και ENRICO PUPPO, *Efficient Implementation of Multi-Triangulations*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '98*, σελίδες 43–50, 1998.

- [DFPM97] LEILA DE FLORIANI, ENRICO PUPPO και PAOLA MAGILLO, *A formal approach to multiresolution modeling*. Στο WOLFGANG STRASSER, REINHARD KLEIN και RENÉ RAU (εκδότες), *Geometric Modeling: Theory and Practice*. Springer-Verlag, 1997.
- [DK90] DAVID P. DOBKIN και DAVID G. KIRKPATRICK, *Determining the Separation of Preprocessed Polyhedra — A Unified Approach*. Στο *Automata, Languages and Programming (Coventry 1990)*, αριθμός 443 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 400–413. Springer-Verlag, 1990.
- [dLvL99] WIM DE LEEUW και ROBERT VAN LIERE, *Collapsing Flow Topology Using Area Metrics*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '99*, σελίδες 349–354, 1999.
- [Eri97] JEFF ERICKSON, *Plücker Coordinates*. Ray Tracing News, 10(3), Δεκέμβριος 1997. <http://www.acm.org/tog/resources/RTNews/html/rtnv10n3.html#art11>.
- [FvDFH96] JAMES D. FOLEY, ANDRIES VAN DAM, STEVEN K. FEINER και JOHN F. HUGHES, *Computer Graphics, Principles and Practice*. Addison-Wesley, δεύτερη έκδοση, 1996.
- [Gar99a] MICHAEL GARLAND, *Multiresolution Modeling: Survey & Future Opportunities*. State of the Art Report, Eurographics '99, 1999.
- [Gar99b] MICHAEL GARLAND, *Quadric-Based Polygonal Surface Simplification*. Διδακτορική διατριβή, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1999.
- [GH97] MICHAEL GARLAND και PAUL S. HECKBERT, *Surface Simplification Using Quadric Error Metrics*. Στο *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, σελίδες 209–216, 1997.
- [GH98] MICHAEL GARLAND και PAUL S. HECKBERT, *Simplifying Surfaces with Color and Texture using Quadric Error Metrics*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '98*, σελίδες 263–270, 1998.
- [GHJ<sup>+</sup>98] TRAN S. GIENG, BERND HAMANN, KENNETH I. JOY, GREGORY L. SCHUSSMAN και ISSAC J. TROTTS, *Constructing Hierarchies for Triangle Meshes*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 4(2):145–161, Απρίλιος-Ιούνιος 1998.
- [GLM96] STEFAN GOTTSCHALK, MING C. LIN και DINESH MANOCHA, *OBB-Tree: A Hierarchical Structure for Rapid Interference Detection*. Στο *SIGGRAPH 96 Conference Proceedings*, σελίδες 171–180, 1996.

- [GPR<sup>+</sup>01] HARALD GARCKE, TOBIAS PREUSSER, MARTIN RUMPF, ALEXANDRU TELEA, ULRICH WEIKARD και JARGE J. VAN WIJK, *A Phase Field Model for Continuous Clustering on Vector Fields*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 7(3):230–241, 2001.
- [GS85] LEONIDAS GUIBAS και JORGE STOLFI, *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams*. ACM Transactions on Graphics, 4(2):74–123, Απρίλιος 1985.
- [GS87] JEFFREY GOLDSMITH και JOHN SALMON, *Automatic Creation of Object Hierarchies for Ray Tracing*. IEEE Computer Graphics and Applications, 7(5):14–20, Μάιος 1987.
- [GSA<sup>+</sup>03] BENJAMIN F. GREGORSKI, DAVID E. SIGETI, J. J. AMBROSIANO, G. GRAHAM, M. WOLINSKY, MARK A. DUCHAINEAU, BERND HAMANN και KENNETH I. JOY, *Multiresolution Representation of Datasets with Material Interfaces*. Στο GERALD FARIN, BERND HAMANN και HANS HAGEN (εκδότες), *Hierarchical and Geometrical Methods in Scientific Visualization*, σελίδες 99–117. Springer-Verlag, 2003.
- [Gué97] ANDRÉ GUÉZIEC, *Surface Simplification Inside a Tolerance Volume*. Τεχνική Αναφορά RC 20440, IBM T.J. Watson Research Center, 1997.
- [Gué99] ANDRÉ GUÉZIEC, *Locally Toleranced Surface Simplification*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 5(2):168–189, 1999.
- [Gué01] ANDRÉ GUÉZIEC, “Meshsweeper”: *Dynamic Point-To-Polygonal-Mesh Distance and Applications*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 7(1):47–61, Ιανουάριος 2001.
- [Hai91] ERIC HAINES, *Fast Ray-Convex Polyhedron Intersection*. Στο JAMES ARVO (εκδότης), *Graphics Gems II*, σελίδες 247–250. Academic Press, 1991.
- [Ham94] BERND HAMANN, *A data reduction scheme for triangulated surfaces*. Computer Aided Geometric Design, 11(2):197–214, 1994.
- [HDD<sup>+</sup>93] HUGUES HOPPE, TONY DEROSE, TOM DUCHAMP, JOHN McDONALD και WERNER STUETZLE, *Mesh Optimization*. Στο SIGGRAPH 93 Conference Proceedings, σελίδες 19–26, 1993. Επίσης διαθέσιμο με περισσότερες λεπτομέρειες ως Τεχνική αναφορά TR UW CSE 1993-01-01.



- [Hel97] MARTIN HELD, *ERIT—A Collection of Efficient and Reliable Intersection Tests*. Journal of Graphics Tools, 2(4):25–44, 1997.
- [HG99] PAUL S. HECKBERT και MICHAEL GARLAND, *Optimal triangulation and quadric-based surface simplification*. Computational Geometry, Theory and Applications, 14(1–3):49–65, 1999.
- [HH91] J.L. HELMAN και LAMBERTUS HESSELINK, *Visualizing vector field topology in fluid flows*. IEEE Computer Graphics and Applications, 11(3):36–46, 1991.
- [HH93] PAUL HINKER και CHARLES HANSEN, *Geometric optimization*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '93*, σελίδες 189–195, 1993.
- [Hop96] HUGUES HOPPE, *Progressive Meshes*. Στο *SIGGRAPH 96 Conference Proceedings*, σελίδες 99–108, 1996.
- [Hop97] HUGUES HOPPE, *View-Dependent Refinement of Progressive Meshes*. Στο *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, σελίδες 189–198, 1997.
- [Hop98] HUGUES HOPPE, *Efficient Implementation of Progressive Meshes*. Computers & Graphics, 22(1):27–36, 1998.
- [Hop99] HUGUES HOPPE, *New Quadric Metric for Simplifying Meshes with Appearance Attributes*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '99*, σελίδες 59–66, 1999.
- [Hub96] PHILIP M. HUBBARD, *Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection*. ACM Transactions on Graphics, 15(3):179–210, Ιούλιος 1996.
- [HWHJ99] BJOERN HECKEL, GUNTHER WEBER, BERND HAMANN και KENNETH I. JOY, *Construction of Vector Field Hierarchies*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '99*, σελίδες 19–25, 1999.
- [Jon00] RAY JONES, *Plücker Coordinate Tutorial*. Ray Tracing News, 13(1), Ιούλιος 2000. <http://www.acm.org/tog/resources/RTNews/html/rtnv13n1.htm#art8>.
- [Jos99] NICOLAI M. JOSUTTIS, *The C++ Standard Library, A Tutorial and Reference*. Addison-Wesley, 1999.
- [JTT01] PABLO JIMÉNEZ, FEDERICO THOMAS και CARME TORRAS, *3D collision detection: a survey*. Computers & Graphics, 25(2):269–285, 2001.

- [KCS98] LEIF KOBBELT, SWEN CAMPAGNA και HANS-PETER SEIDEL, *A General Framework for Mesh Decimation*. Στο WAYNE DAVIS, KELLOGG BOOTH και ALAIN FOURNIER (εκδότες), *Proceedings of Graphics Interface '98*, σελίδες 43–50, Vancouver, 1998.
- [KE00] MARTIN KRAUS και THOMAS ERTL, *Simplification of Nonconvex Tetrahedral Meshes*. Στο *NSF/DoE Lake Tahoe Workshop on Hierarchical Approximation and Geometrical Methods for Scientific Visualization*, 2000.
- [KHM<sup>+</sup>98] JAMES T. KLOSOWSKI, MARTIN HELD, JOSEPH S.B. MITCHELL, HENRY SOWIZRAL και KAREL ZIKAN, *Efficient Collision Detection Using Bounding Volume Hierarchies of  $k$ -DOPs*. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 4(1):21–36, Ιανουάριος 1998.
- [Kle98] REINHARD KLEIN, *Multiresolution representations for surfaces meshes based on the vertex decimation method*. *Computers & Graphics*, 22(1):13–26, 1998.
- [KLS96] REINHARD KLEIN, GUNTHER LIEBICH και WOLFGANG STRASSER, *Mesh reduction with error control*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '96*, σελίδες 311–318, 1996.
- [KT96] ALAN D. KALVIN και RUSSELL H. TAYLOR, *Superfaces: Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error*. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(3):64–77, 1996.
- [LE97] DAVID LUEBKE και CARL ERIKSON, *View-dependent simplification of arbitrary polygonal environments*. Στο *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, σελίδες 199–208, 1997.
- [Lin00] PETER LINDSTROM, *Out-of-Core Simplification of Large Polygonal Models*. Στο *SIGGRAPH 2000 Conference Proceedings*, σελίδες 259–262, 2000.
- [LPC<sup>+</sup>00] MARC LEVOY, KARI PULLI, BRIAN CURLESS, SZYMON RUSINKIEWICZ, DAVE KOLLER, LUCAS PEREIRA, MATT GINZTON, SEAN ANDERSON, JAMES DAVIS, JEREMY GINSBERG, JONATHAN SHADE και DUANE FULK, *The Digital Michelangelo Project: 3D Scanning of Large Statues*. Στο *SIGGRAPH 2000 Proceedings*, σελίδες 131–144, 2000.
- [LT97] KOK-LIM LOW και TIOW-SENG TAN, *Model simplification using vertex-clustering*. Στο *Proceedings of the 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics*, σελίδες 75–81, 1997.

- [LT98] PETER LINDSTROM και GREG TURK, *Fast and Memory Efficient Polygonal Simplification*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '98*, σελίδες 279–286, 1998.
- [LT99] PETER LINDSTROM και GREG TURK, *Evaluation of Memoryless Simplification*. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(2):98–115, Απρίλιος-Ιούνιος 1999.
- [MT97] TOMAS MÖLLER και BEN TRUMBORE, *Fast, Minimum Storage Ray/Triangle Intersection*. *journal of graphics tools*, 2(1):21–28, 1997.
- [MW95] DAVID L. MARCUM και NIGEL P. WEATHERILL, *Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection*. *AIAA Journal*, 33(9):1619–1625, 1995.
- [NHM97] GREGORY M. NIELSON, HANS HAGEN και HEINRICH MÜLLER, *Scientific Visualization: Overview, Methodologies and Techniques*. IEEE Press, 1997.
- [NM95] ATUL NARKHEDE και DINESH MANOCHA, *Fast polygon triangulation based on Seidel's algorithm*. Στο ALAN W. PAETH (εκδότης), *Graphics Gems V*, σελίδες 394–397. Academic Press, 1995.
- [O'R98] JOSEPH O'ROURKE, *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, δεύτερη έκδοση, 1998.
- [PH97] JOVAN POPOVIĆ και HUGUES HOPPE, *Progressive Simplicial Complexes*. Στο *SIGGRAPH '97 Proceedings*, σελίδες 217–224, 1997.
- [PR00] RENATO PAJAROLA και JAREK ROSSIGNAC, *Compressed Progressive Meshes*. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6(1):79–93, 2000.
- [PRS99] RENATO PAJAROLA, JAREK ROSSIGNAC και ANDRZEJ SZYMCAK, *Implant Sprays: Compression of Progressive Tetrahedral Mesh Connectivity*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '99*, σελίδες 299–305, 1999.
- [PS85] FRANCO P. PREPARATA και MICHAEL I. SHAMOS, *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [PS97] ENRICO PUPPO και ROBERTO SCOPIGNO, *Simplification, LOD and Multiresolution — Principles and Applications*. Eurographics '97 Tutorial Notes, 1997.
- [PS98] CHRISTOS PAPADIMITRIOU και KENNETH STEIGLITZ, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Publications, 1998.

- [PT03a] NIKOS PLATIS και THEOHARIS THEOHARIS, *Fast Ray-Tetrahedron Intersection Using Plücker Coordinates*. *Journal of Graphics Tools*, 8(4):37–48, 2003.
- [PT03b] NIKOS PLATIS και THEOHARIS THEOHARIS, *Progressive Hulls for Intersection Applications*. *Computer Graphics Forum*, 22(2):107–116, 2003.
- [PT04a] NIKOS PLATIS και THEOHARIS THEOHARIS, *Simplification of Vector Fields over Tetrahedral Meshes*. Στο *Proceedings of Computer Graphics International 2004*, σελίδες 174–181, Κρήτη, Ιούνιος 2004.
- [PT04b] NIKOS PLATIS και THEOHARIS THEOHARIS, *Techniques for Simplification of Vector Fields over Tetrahedral Meshes with Error Evaluation*, 2004. (Υπό κρίση).
- [Pup98] ENRICO PUPPO, *Variable Resolution Triangulations*. *Computational Geometry*, 11(3–4):219–238, Δεκέμβριος 1998.
- [RB93] JAREK ROSSIGNAC και PAUL BOREL, *Multi-resolution 3D approximations for rendering complex scenes*. Στο B. FALCIDIENO και T. KUNII (εκδότες), *Modeling in Computer Graphics: Methods and Applications*, σελίδες 455–465. Springer-Verlag, 1993.
- [Red96] MICHAEL REDDY, *SCROOGE: Perceptually-Driven Polygon Reduction*. *Computer Graphics Forum*, 15(4):191–203, 1996.
- [RLB<sup>+</sup>02] JOSÉ RIBELLES, ANGELES LÓPEZ, OSCAR BELMONTE, INMACULADA REMOLAR και MIGUEL CHOVER, *Multiresolution modeling of arbitrary polygonal surfaces: a characterization*. *Computers & Graphics*, 26(3):449–462, Ιούνιος 2002.
- [RO96] KEVIN J. RENZE και JAMES H. OLIVER, *Generalized Unstructured Decimation*. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(6):24–32, Νοέμβριος 1996.
- [Rog85] DAVID F. ROGERS, *Procedural Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, 1985.
- [RR96] RÉMI RONFARD και JAREK ROSSIGNAC, *Full-range approximation of triangulated polyhedra*. *Computer Graphics Forum*, 15(3):67–76, 1996.
- [Sch97] WILLIAM J. SCHROEDER, *A topology modifying progressive decimation algorithm*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '97*, σελίδες 205–212, 545, 1997.

- [Sei91a] RAIMUND SEIDEL, *A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons*. Computational Geometry: Theory and Applications, 1(1):51–64, 1991.
- [Sei91b] RAIMUND SEIDEL, *Small-dimensional linear programming and convex hulls made easy*. Discrete Computational Geometry, 6:423–434, 1991.
- [SF01] RAFAEL J. SEGURA και FRANCISCO R. FEITO, *Algorithms to Test Ray-Triangle Intersection. Comparative Study*. Στο VACLAV SKALA (εκδότης), *WSCG 2001 Conference Proceedings*, Φεβρουάριος 2001.
- [SG98] OLIVER G. STAADT και MARKUS H. GROSS, *Progressive Tetrahedralizations*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '98*, σελίδες 397–402, 1998.
- [SGG<sup>+</sup>00] PEDRO V. SANDER, XIANFENG GU, STEVEN J. GORTLER, HUGUES HOPPE και JOHN SNYDER, *Silhouette Clipping*. Στο *SIGGRAPH 2000 Conference Proceedings*, σελίδες 327–334, 2000.
- [Sho98] KEN SHOEMAKE, *Plücker Coordinate Tutorial*. Ray Tracing News, 11(1), Ιούλιος 1998. <http://www.acm.org/tog/resources/RTNews/html/rtnv11n1.html#art3>.
- [SL96] MARC SOUCY και DENIS LAURENDEAU, *Multiresolution surface modeling based on hierarchical triangulation*. Computer Vision and Image Understanding, 63(1):1–14, 1996.
- [Sto91] JORGE STOLFI, *Oriented Projective Geometry*. Academic Press, 1991.
- [Str00] BJARNE STROUSTRUP, *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley, τρίτη έκδοση, 2000.
- [SZL92] WILLIAM J. SCHROEDER, JONATHAN A. ZARGE και WILLIAM E. LORENSEN, *Decimation of Triangle Meshes*. Στο *SIGGRAPH 92 Conference Proceedings*, σελίδες 65–70, Ιούλιος 1992.
- [TH99] SETH TELLER και MICHAEL HOHMEYER, *Determining the Lines Through Four Lines*. journal of graphics tools, 4(3):11–22, 1999.
- [THJ99] ISSAC J. TROTTS, BERND HAMANN και KENNETH I. JOY, *Simplification of Tetrahedral Meshes with Error Bounds*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 5(3):224–237, 1999.
- [THJW98] ISSAC J. TROTTS, BERND HAMANN, KENNETH I. JOY και DAVID F. WILEY, *Simplification of Tetrahedral Meshes*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '98*, σελίδες 287–296, 1998.

- [THKJ00] ISSAC J. TROTTS, BERND HAMANN, DAVID KENWRIGHT και KENNETH I. JOY, *Simplification of Tetrahedral Meshes Using a Quadratic Error Metric*. Στο *NSF/DoE Lake Tahoe Workshop on Hierarchical Approximation and Geometrical Methods for Scientific Visualization*, 2000.
- [TLHD03] YIYING TONG, SANDIAGO LOMBAYDA, ANIL N. HIRANI και MATHIEU DESBRUN, *Discrete Multiscale Vector Field Decomposition*. Στο *SIGGRAPH 2003 Conference Proceedings*, σελίδες 445–452, 2003.
- [TSH00] XAVIER TRICOCHÉ, GERIK SCHEUERMANN και HANS HAGEN, *A Topology Simplification Method For 2D Vector Fields*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization 2000*, σελίδες 359–366, 2000.
- [Tur92] GREG TURK, *Re-Tiling Polygonal Surfaces*. Στο *SIGGRAPH 92 Conference Proceedings*, σελίδες 55–64, Ιούλιος 1992.
- [TvW99] ALEXANDRU TELEA και JARKE J. VAN WIJK, *Simplified Representation of Vector Fields*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '99*, σελίδες 35–42, 1999.
- [Wat93] ALAN WATT, *3D Computer Graphics*. Addison-Wesley, δεύτερη έκδοση, 1993.
- [XV96] JULIE C. XIA και AMITABH VARSHNEY, *Dynamic View-Dependent Simplification for Polygonal Models*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '96*, σελίδες 327–334. IEEE, 1996.
- [YN97] FUJIO YAMAGUCHI και MASATOSHI NIIZEKI, *Some basic geometric test conditions in terms of Plücker coordinates and Plücker coefficients*. *The Visual Computer*, 13(1):29–41, 1997.
- [YNF90] FUJIO YAMAGUCHI, MASHATOSHI NIIZEKI και HIROYUKI FUKUNAGA, *Two robust, point-in-polygon tests based on the  $4 \times 4$  determinant method*. Στο *Proceedings of ASME 16th Design Automation Conference*, τόμος 23, σελίδες 89–95, 1990.
- [ZCK97] YONG ZHOU, BAOQUAN CHEN και ARIE KAUFMAN, *Multiresolution tetrahedral framework for visualizing regular volume data*. Στο *Proceedings of IEEE Visualization '97*, 1997.
- [ΘΜ99] ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΘΕΟΧΑΡΗΣ και ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΠΕΜ, *Γραφικά, Αρχές και Αλγόριθμοι*. Συμμετρία, 1999.
- [ΚΦ93] ΣΤΡΑΤΗΣ ΚΟΥΝΙΑΣ και ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΦΑΚΙΝΟΣ, *Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, δεύτερη έκδοση, 1993.

- [Μισ95] ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΙΣΤΡΛΗΣ, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. 1995.
- [Μισ02] ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΙΣΤΡΛΗΣ, *Δομές Δεδομένων με C*. 2002.
- [Χρυ92] ΘΑΝΑΣΗΣ ΧΡΥΣΑΚΗΣ, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*. Συμμετρία, 1992.





## Ευρετήριο

### Ελληνικοί όροι

- A** ακμή
- συμβολισμός, 6
  - συρρίκνωση, βλ. συρρίκνωση ακμής
  - ως υποάπλοχο, 6
  - ανάλυση μοντέλου, 15
  - αντιμετατεθημένο εσωτερικό γινόμενο, 107, 112
  - απαλοιφή κορυφών, 21, 24, 35
  - αντιστροφή, 36
  - απλοειδές σύμπλοκο, 6, 12
  - και τοπολογία, 10
  - άπλοχο, 6
  - απλοποίηση, 16
    - βαθμωτών πεδίων, 25
    - βελτιστοποιημένη, βλ. βελτιστοποίηση
    - διανυσματικών πεδίων, 25
    - σε διάσπαρτα σημεία, 72
    - διατήρηση όγκου, 23, 25
    - διατήρηση συνόρου, 24
    - ελαχιστοποίηση απόστασης από άστρο, 24
    - κάθετο διάνυσμα, 20, 23, 49, 51
    - κρίσιμων σημείων, 73, 77, 93
    - με απαλοιφή κορυφών, 21, 24, 35, 36
    - με συγχώνευση κορυφών, 20
    - με συγχώνευση συνεπίπεδων όψεων, 19
    - με συρρίκνωση ακμών, 22, 24–26, 36
    - με συρρίκνωση ημι-ακμών, 78
    - με συρρίκνωση τετραέδρων, 26, 36
    - μέθοδος τετραγωνικών σφαλμάτων, 24, 37, 82, 83
    - πεδίου σε τριγωνικό πλέγμα, βλ. πεδίο σε τριγωνικό πλέγμα, απλοποίηση
    - πολύ μεγάλων μοντέλων, 21, 70, 102
    - συνόρου, 25, 76, 86, 87, 93
    - σχήμα τριγώνων, 23, 24, 49
    - τετραεδρικών πλεγμάτων, 24, 71
    - τριγωνικών πλεγμάτων, 19
  - απόσταση
    - Hausdorff, 18, 22, 87
    - επιφανειών, 18
    - μέση τετραγωνική, 18
    - παραμετρική, 105, 110
    - πεδίου, 19

- προσέγγιση, 18  
 σημείου από επίπεδο, 10, 79  
   τετραγωνική, 37  
 σημείου από επιφάνεια, 18  
 τετραεδρικών πλεγμάτων με  
   πεδία, 19  
   τομέα, 19  
 αποτελέσματα, 51, 63, 90, 115  
 άστρο, 29, 35  
   σε τετραεδρικό πλέγμα, 13  
   σε τριγωνικό πλέγμα, 10, 44, 47, 62  
 αυτο-τομές, 25, 76
- Β** βασικό περίβλημα, 43, 62, 66  
 βασικό πλέγμα, 28, 33, 34  
 βελτιστοποίηση, 23, 25, 26, 29, 92,  
 101  
 γραμμική, 44, 46, 48  
 μέθοδος Simplex, 46
- Γ** γεωμορφισμός, 28
- Δ** δειγματοληψία, 18, 75, 85, 91  
 διαμέριση χώρου, 42  
   ιεραρχική, 21, 42  
   προσαρμοστική, 21  
 διάνυσμα  
   κάθετο, βλ. κάθετο διάνυσμα  
   κανονικοποιημένο κάθετο, 10  
 διάσπαση κορυφής, 32, 34  
   παραμετροποίηση, 32, 34, 35  
   σε τετραεδρικό πλέγμα, 74  
 διάσταση  
   απλοειδούς συμπλόκου, 6  
   απλόκου, 6  
   πολλαπλότητας, 7  
 διάταξη κορυφών  
   όψεων τετραέδρου, 13  
   τετραέδρου, 13
- τριγώνου, 9  
 δίδερα γωνία, 87  
 δίσκος, 7
- Ε** έδρα  
   τετραέδρου, 104  
   ως υποάπλοκο, 6  
 εκλέπτυνση, 34  
   επιλεκτική/τοπική, 34, 59, 60, 66  
 εκτρέχυνση  
   επιλεκτική, 35, 68, 69  
 έλεγχος συγκρούσεων, 103  
 εξωτερικό  
   τετραέδρου, 13  
   τριγώνου, 9  
 επίπεδα λεπτομέρειας, 16  
   διακριτά/συνεχή, 28, 31  
   συνδυασμός τους, 16  
 επίπεδο  
   εξίσωση, 8  
   κάθετο διάνυσμα, 9  
 εσωτερικό  
   τετραέδρου, 13  
   τριγώνου, 9  
 εσωτερικό γινόμενο  
   αντιμετατεθημένο, βλ.  
     αντιμετατεθημένο εσωτερικό  
     γινόμενο  
 ευθυγράμμιση, 17
- Η** ημι-ακμή, 78  
 ημιδίσκος, 7  
 ημιευθεία, 104, 107
- Ι** ισοεπιφάνεια, 25
- Κ** κάθετο διάνυσμα, 9  
   απόκλιση σε απλοποίηση, βλ.  
   απλοποίηση, κάθετο  
   διάνυσμα

- όψης, 9, 13  
 κλειστή επιφάνεια, 7  
 προσανατολισμός, 8  
 κορυφή  
 διάσπαση, βλ. διάσπαση κορυφής  
 συμβολισμός, 6  
 ως υποάπλοκο, 6  
 κρίσιμο σημείο, 72  
 και απλοποίηση, βλ. απλοποίηση  
 κρίσιμων σημείων  
 κυρτό περίβλημα, 6
- Λ** λεπτομέρεια, 15  
 επιλεκτική, 15, 21  
 επίπεδα λεπτομέρειας, βλ. επίπεδα  
 λεπτομέρειας
- Μ** μοντέλα  
 εξαεδρικά, 12  
 πολυγωνικά, βλ. πολυγωνικά  
 μοντέλα  
 πολυεδρικά, βλ. πολυεδρικά  
 μοντέλα  
 τετραεδρικά, βλ. τετραεδρικά  
 μοντέλα  
 τριγωνικά, βλ. τριγωνικά μοντέλα
- Ο** όγκος  
 διατήρηση σε απλοποίηση, βλ.  
 απλοποίηση, διατήρηση  
 όγκου  
 κενού χώρου περιβλήματος, 53, 65  
 περιβάλλον, βλ. περιβάλλον όγκος  
 τετραέδρου, 10, 13, 45  
 πρόσημο, 10  
 οκτάδενδρο, 21, 42  
 οπτικοποίηση, 17  
 ουρά προτεραιότητας, 22, 27  
 πολυπλοκότητα, 29
- υλοποίηση, 29, 50  
 όψη  
 εσωτερική/εξωτερική  
 επιφάνειας, 8  
 τριγώνου, 9  
 κάθετο διάνυσμα, βλ. κάθετο  
 διάνυσμα όψης  
 συμβολισμός, 6  
 τριγωνικού πλέγματος, 6  
 ως υποάπλοκο, 6
- Π** παρακολούθηση ακτίνας, 41, 103, 106  
 σε τετραεδρικό πλέγμα, 112, 114,  
 117  
 παραμετροποίηση διάσπασης  
 κορυφής, βλ. διάσπαση  
 κορυφής, παραμετροποίηση  
 παρεμβολή  
 τιμών διανυσματικού πεδίου, 86, 91  
 παρεμβολή  
 σε τριγωνικά πλέγματα, 11  
 τιμών διανυσματικού πεδίου, 14,  
 85, 91  
 πεδίο  
 βαθμωτό, 14, 25  
 διανυσματικό, 14, 25  
 σύγκριση πεδίων, 91  
 σε τετραεδρικό πλέγμα, 14  
 σε τριγωνικό πλέγμα, 11  
 απλοποίηση, 22, 23  
 υψομετρικό, 80  
 περιβάλλον όγκος, 42  
 ιεραρχικός, 43, 66  
 περίβλημα  
 βασικό, βλ. βασικό περίβλημα  
 κυρτό, βλ. κυρτό περίβλημα  
 προοδευτικό, βλ. προοδευτικό  
 περίβλημα  
 πλέγμα

- βασικό, βλ. βασικό πλέγμα  
 προοδευτικό, βλ. προοδευτικό πλέγμα  
 τετραεδρικό, βλ. τετραεδρικό πλέγμα  
 τριγωνικό, βλ. τριγωνικό πλέγμα  
 πολλαπλές αναλύσεις, 20  
 πολλαπλότητα, 7, 12  
 και απλοποίηση, 21, 22, 31  
 και τοπολογία, 10  
 με σύνορο, 7  
 πολυγωνικά μοντέλα, 5  
 πολυεδρικά μοντέλα, 12  
 πολυπλοκότητα  
 αλγόριθμου απλοποίησης, 29  
 ουράς προτεραιότητας, 29  
 προοδευτικό περίβλημα, 41, 43  
 για έλεγχο τομής, 59  
 προοδευτικό πλέγμα, 33  
 τετραεδρικό, 74  
 προσανατολισμός, 7  
 σχετικός δύο ημιευθειών, 107  
 τετραέδρου, 104  
 τριγωνικού πλέγματος, 9, 44  
 προτεραιότητα συρρίκνωσης  
 ακμής, 27, 28  
 για προοδευτικό περίβλημα, 46, 52, 54, 64, 65
- P** ρευματογραμμή, 72, 73, 90
- Σ** σθένος κορυφής, 10, 13  
 και απλοποίηση, 48, 51, 88  
 συγχώνευση κορυφών, 20  
 συγχώνευση όψεων, 19  
 συμβολισμός  
 ακμής, 6  
 ακμών έδρας τετραέδρου, 104  
 ακμών τριγώνου, 108
- διανυσματικού πεδίου επί  
 τετραεδρικού  
 πλέγματος, 15  
 εδρών τετραέδρου, 104  
 κορυφής, 6  
 κορυφών έδρας τετραέδρου, 104  
 όψης, 6  
 τετραεδρικού πλέγματος, 12  
 τριγωνικού πλέγματος, 5  
 τριγώνου, 6  
 συμπάγεια  
 τετραέδρου, 88  
 τριγώνου, 49, 51  
 σύμπλοκο  
 απλοειδές, βλ. απλοειδές σύμπλοκο  
 συνδεσιμότητα  
 τετραεδρικού πλέγματος, 12  
 τριγωνικού πλέγματος, 5, 10  
 σύνδεσμος  
 σε τετραεδρικό πλέγμα, 13  
 σε τριγωνικό πλέγμα, 10  
 σύνορο  
 απλοποίηση, βλ. απλοποίηση  
 συνόρου  
 διατήρηση σε απλοποίηση, βλ.  
 απλοποίηση, διατήρηση  
 συνόρου  
 και τοπολογία, 10  
 πολλαπλότητας, 7  
 τετραεδρικού πλέγματος, 12, 14  
 τετραεδρικού πλέγματος για σφάλμα  
 τομέα, 19  
 συντεταγμένες  
 Plücker, 106, 107, 110  
 βαρυκεντρικές, 105, 109, 111, 114  
 καρτεσιανές, 104, 110  
 ομογενείς, 107  
 συρρίκνωση ακμής, 22, 26, 38, 44, 82

αντιστροφή, βλ. διάσπαση κορυφής  
εγκυρότητα, 31  
με κρίσιμα σημεία, 77  
προτεραιότητα, 27, 28  
σε τετραεδρικό πλέγμα, 73  
στο σύνορο, 22, 76, 87  
τοποθέτηση κορυφής, 22, 28  
συρρίκνωση ημι-ακμής, 78, 84, 92  
σφάλμα  
πεδίου, 19, 25, 75  
εκτίμηση, 85  
σύνθετο, 84, 92  
παράγοντες, 97  
τετραγωνικό, 89, 92  
τομέα, 19, 25, 75  
εκτίμηση, 87  
σφάλμα απλοποίησης, 16, 22, 25  
ολικό/τοπικό, 31  
προσέγγιση, 18, 25  
σύγκριση εμφάνισης, 17, 20  
σύγκριση χαρακτηριστικών, 17  
συσσώρευση, 22, 39, 86, 88

**T** ταινία του Möbius, 8, 9  
τέμνον επίπεδο, 90  
τετραγωνικά σφάλματα, βλ.  
απλοποίηση, μέθοδος  
τετραγωνικών σφαλμάτων  
τετραγωνική μορφή, 37  
ελαχιστοποίηση, 38  
τετραεδρικό μοντέλο, 12  
τετραεδρικό πλέγμα, 12  
προοδευτικό, 74  
συμβολισμός, 12  
τετράεδρο  
όγκος, βλ. όγκος τετραέδρου  
προσανατολισμός, 104  
ως άπλοκο, 6  
τετραεδροποίηση, 12, 14, 15

τομέας διανυσματικού πεδίου, 15, 19  
τομή  
ακτίνας-κυρτού πολυέδρου, 103,  
105  
αλγόριθμος Haines, 105, 116  
ακτίνας-προοδευτικού τετραεδρικού  
πλέγματος, 119  
ακτίνας-τετραέδρου, 103, 110  
ακτίνας-τριγώνου, 105  
αλγόριθμος  
Möller-Trumbore, 106, 116  
με συντεταγμένες Plücker, 106  
ευθείας-τριγωνικού μοντέλου, 41,  
59  
διαδοχικοί έλεγχοι, 62, 68  
τοπολογία  
διανυσματικού πεδίου, 72  
και απλοποίηση, 78, 102  
και απλοποίηση, 21–23, 31, 48  
τετραεδρικού πλέγματος  
και απλοποίηση, 75  
τριγωνικού πλέγματος, 10  
τριγωνικά μοντέλα, 5  
τριγωνικό πλέγμα, 5  
μη γεωμετρικά χαρακτηριστικά, 11  
συμβολισμός, 5  
τοπολογία, 10  
ως απλοειδές σύμπλοκο, 6  
 τρίγωνο  
συμβολισμός, 6  
ως άπλοκο, 6  
τριγωνοποίηση, 5  
τροχιογραμμή, 72, 90

**Υ** υπερεπίπεδο, 79, 80  
υπερεπιφάνεια, 80, 81  
υπερόψη, 20  
υποάπλοκο, 6

**Φ** φορά διαδρομής ακμής  
 τετραεδρικά πλέγματα, 13  
 τριγωνικά πλέγματα, 9

**X** χαρακτηριστικά κορυφών τριγωνικών  
 πλεγμάτων, βλ. πεδίο σε  
 τριγωνικό πλέγμα

## Αγγλικοί όροι

**A** AABB, 43  
 alignment, 17  
 axis-aligned bounding box, 43

**B** bluntfin, 92

**C** coarsening  
 selective, 35  
 compactness, 49  
 complex  
 simplicial, 6  
 critical point, 72

**D** discrete orientation polytope, 43  
 DOP, 43, 66

**E** edge collapse, 22  
 extrapolation, 86

**F** face, 6  
 facet, 6  
 flow field, 73

**G** geomorphing, 28

**H** Hausdorff  
 απόσταση, βλ. απόσταση Haus-  
 dorff  
 height field, 80

**I** image-based rendering, 17

**L** level of detail, 16  
 Liang-Barsky αλγόριθμος, 105

link, 10  
 LOD, 16

**M** Möller-Trumbore αλγόριθμος, βλ.  
 τομή ευθείας-τριγώνου, αλ-  
 γόριθμος Möller-Trumbore  
 manifold, 7  
 mesh  
 progressive, 33  
 tetrahedral, 12  
 triangular, 5

**O** OBB, 43  
 octree, 21  
 OpenDX, 90  
 oriented bounding box, 43

**P** Plücker  
 συντεταγμένες, βλ. συντεταγμένες  
 Plücker  
 progressive hull, 43  
 progressive mesh, 33

**Q** quadric error metric, 37

**R** refinement, 34  
 selective, 34

**S** scattered data vector field, 72  
 simplex, 6  
 Simplex μέθοδος, 46  
 simplicial complex, 6  
 star, 10

streakline, 72  
streamline, 72  
subsimplex, 6  
superface, 20

**T** triangular mesh, 5  
**V** valence, 10  
vertex clustering, 20  
vertex split, 32

