Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων – Το Θεώρημα της Κυριαρχίας

Ηλίας Κ. Σταυρόπουλος

Νοέμβριος 2006

1 Το Θεώρημα της Κυριαρχίας

Το Θεώρημα της Κυριαρχίας, ή διαφορετικά, το Κεντρικό Θεώρημα (The Master Theorem), αποτελεί μια μέθοδο επίλυσης αναδρομικών εξισώσεων της μορφής

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

όπου $a \geq 1$ και $b > 1$ σταθερές και $f(n)$ μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση.

Η παραπάνω αναδρομική σχέση περιγράφει το χρόνο εκτέλεσης ενός «διαίρει και βασίλευε» αλγορίθμου που διαιρεί το αρχικό πρόβλημα μεγέθους n σε a υποπροβλήματα μεγέθους n/b, καθένα από τα οποία επιλύεται σε χρόνο $T(n/b)$, ενώ το κόστος της διαίρεσης καθώς και της σύνθεσης των επιμέρους αποτελεσμάτων για την παραγωγή της τελικής λύσης δίνεται από τη συνάρτηση $f(n)$. Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1.1 *Έστω $a \geq 1$ και $b > 1$ σταθερές, $f(n)$ μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση και $T(n)$ μια συνάρτηση που ορίζεται επί των μη αρνητικών ακεραίων σύμφωνα με την αναδρομική σχέση*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

1. *Αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.*
3. *Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, και αν $a\,f(n/b) \leq c\,f(n)$ για κάποια θετική σταθερά $c < 1$ για κάθε n από κάποια τιμή και πάνω, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Στην επόμενη ενότητα θα εφαρμόσουμε στο Θεώρημα της Κυριαρχίας για την επίλυση κάποιων αναδρομικών εξισώσεων. Πρώτα όμως ας κατανοήσουμε τη σημασία του. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση συγκρίνουμε τη συνάρτηση $f(n)$ με τη συνάρτηση $n^{\log_b a}$ και σε κάθε περίπτωση η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι η ασυμπτωτικά μεγαλύτερη από τις δύο συναρτήσεις. Προσοχή όμως: δεν αρκεί μια από τις δύο να είναι μεγαλύτερη, αλλά πολυωνυμικά μεγαλύτερη από την άλλη. Έτσι, στην περίπτωση (1) η $f(n)$ είναι πολυωνυμικά μικρότερη από την $n^{\log_b a}$ (συγκεκριμένα κατά n^{ϵ}, για κάποιο $\epsilon > 0$), οπότε η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$. Στην περίπτωση (2) οι δύο συναρτήσεις είναι της ίδιας τάξης μεγέθους οπότε η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$. Τέλος, στην περίπτωση (3), η συνάρτηση $f(n)$ είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερη από την $n^{\log_b a}$ (συγκεκριμένα κατά n^{ϵ}, για κάποιο $\epsilon > 0$), και επιπλέον θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη «κανονικότητας» $a\,f(n/b) \leq c\,f(n)$, μια συνθήκη που ικανοποιούν οι περισσότερες πολυωνυμικά φραγμένες συναρτήσεις που θα συναντήσουμε. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(f(n))$.

2 Εφαρμόγη του Θ. Κυριαρχίας

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Κυριαρχίας για να λύσουμε μερικές αναδρομικές εξισώσεις:

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$.

   Είναι $a = 9, b = 3, f(n) = n$, οπότε $n^{\log_3 9} = n^2$ και $f(n) = O(n^{2-\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (1) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^2)$.

2. $T(n) = T(2n/3) + 1$.

   Είναι $a = 1, b = 3/2, f(n) = 1$, οπότε $n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$ και $f(n) = \Theta(1)$. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (2) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(\log n)$.

3. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$.

   Είναι $a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$, οπότε $n^{\log_4 3} = n^{0.793}$ και $f(n) = \Omega(n^{0.793+\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Επίσης, $af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) = \frac{3}{4}n\log(n/4) \leq \frac{3}{4}n\log n = cf(n)$, όπου $c = \frac{3}{4}$, για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του n. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (3) του Θεωρήματος. Άρα $T(n) = \Theta(n \log n)$.

4. $T(n) = 4T(n/2) + n$.

   Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n$, οπότε $n^{\log_4 2} = n^2$ και $f(n) = O(n^{2-\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (1) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^2)$.

5. $T(n) = 3T(n/2) + n$.

   Είναι $a = 3, b = 2, f(n) = n$, οπότε $n^{\log_3 2} = n^{1.59}$ και $f(n) = O(n^{1.59-\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (1) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^{1.59})$.

6. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$.

   Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n^2$, οπότε $n^{\log_4 2} = n^2$ και $f(n) = \Theta(n^2)$. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (2) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

7. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.

   Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n^3$, οπότε $n^{\log_4 2} = n^2$ και $f(n) = \Omega(n^{2+\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Επίσης, $af(n/b) = 3(n/2)^3 = \frac{1}{2}n^3 = cf(n)$, όπου $c = \frac{1}{2}$, για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του n. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (3) του Θεωρήματος. Άρα $T(n) = \Theta(n^3)$.

8. $T(n) = T(n-1) + n$.

   Η αναδρομική εξίσωση $T(n) = T(n-1)+n$, δεν είναι της μορφής $T(n) = aT(n/b)+f(n)$, συνεπώς δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα της Κυριαρχίας. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λύθει, για παράδειγμα, με εφαρμογή της μεθόδου της επανάληψης.

9. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$.

   Είναι $a = 2, b = 2, f(n) = n \log n$, οπότε $n^{\log_2 2} = n$ και $f(n) = \Omega(n)$, ωστόσο $\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{n \log n}{n} = \log n$ δηλαδή η $f(n)$ δεν είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερη από την $n^{\log_2 2}$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα της Κυριαρχίας. Η αναδρομική εξίσωση μπορεί να λυθεί, για παράδειγμα, με χρήση της μεθόδου της επανάληψης.

10. $T(n) = 8T(n/2) + n$.

    Είναι $a = 8, b = 2, f(n) = n$, οπότε $n^{\log_2 8} = n^3$ και $f(n) = O(n^{3-\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (1) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^3)$.

11. $T(n) = 9T(n/3) + n^2$.

    Είναι $a = 9, b = 3, f(n) = n^2$, οπότε $n^{\log_3 9} = n^2$ και $f(n) = \Theta(n^2)$. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (2) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

12. $T(n) = 2T(n/3) + n/2$.

    Είναι $a = 2, b = 3, f(n) = n/2$, οπότε $n^{\log_3 2} = n^{0.631}$ και $f(n) = \Omega(n^{0.631+\epsilon})$, όπου ϵ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Επίσης, $af(n/b) = 2\frac{n/3}{2} = \frac{2}{3}n/2 = cf(n)$, όπου $c = \frac{2}{3}$, για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του n. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (3) του Θεωρήματος. Άρα $T(n) = \Theta(n/2) = \Theta(n)$.

13. $T(n) = T(n/2) + 1$.

    Είναι $a = 1, b = 2, f(n) = 1$, οπότε $n^{\log_2 1} = n^0 = 1$ και $f(n) = \Theta(1)$. Άρα εφαρμόζεται η περίπτωση (2) του Θεωρήματος. Συνεπώς $T(n) = \Theta(\log n)$.